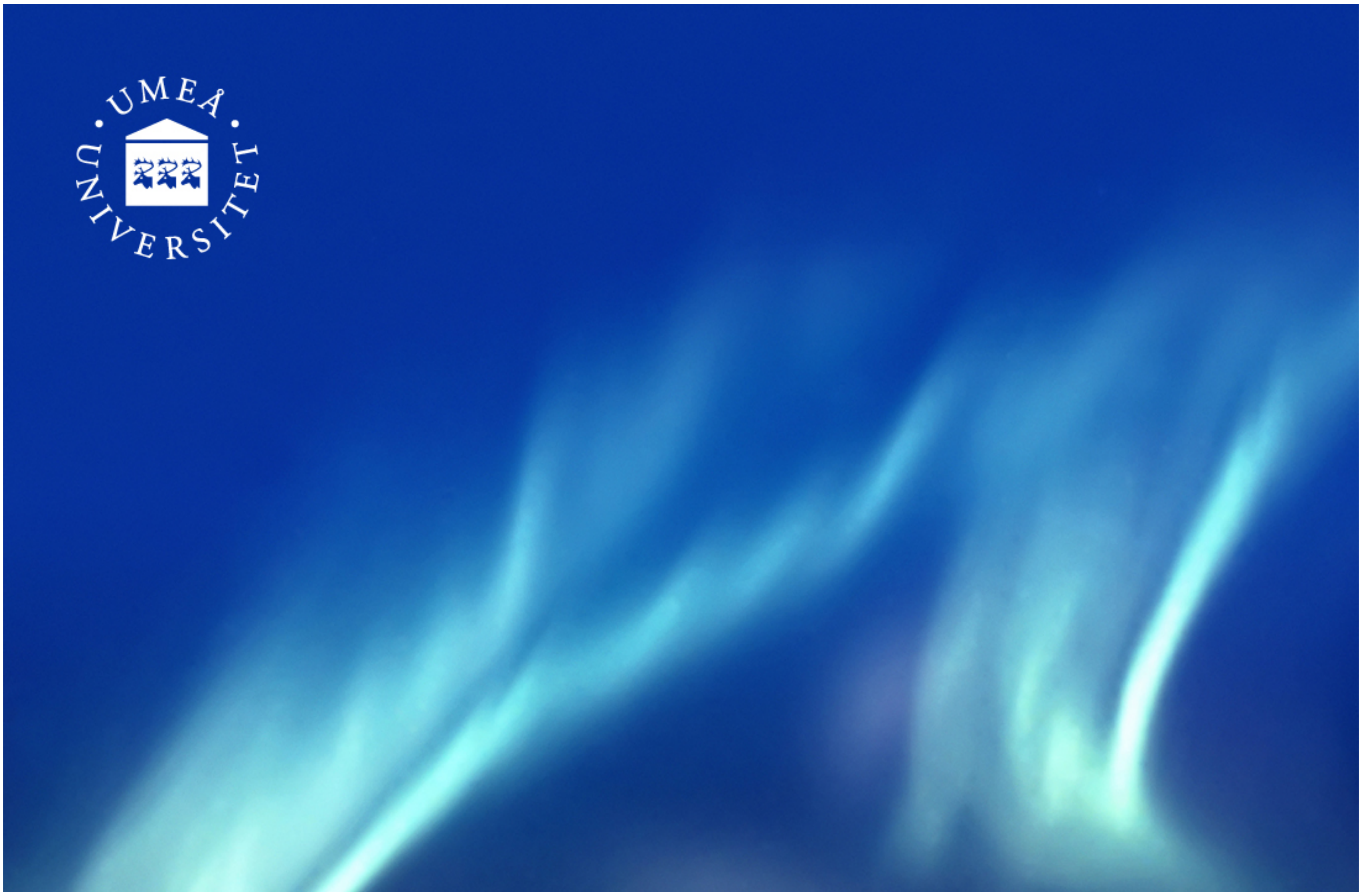


Derivatan ur ett historiskt perspektiv

Tobias Karlsson

Ht 2017
Kandidatuppsats, 15hp
Kandidatexamen i matematik, 180hp
Institutionen för matematik och matematisk statistik

Sammanfattning

Derivatan är en fundamental del av matematiken. Denna uppsats kommer att handla om historiska framstegen inom matematiken som lett fram till att derivatan har kunnat definierats så som vi är vana att se den idag.

Abstract

Derivata is a fundamental part of mathematics. This essay will be about historical advancements in mathematics, which led to the fact that the derivative has been defined as we are used to seeing it today.

”Great advances in mathematics and science are almost always built on the work of many men who contribute bit by bit over hundreds of years.”

Isaac Newton

Innehåll

1. Inledning

Derivatan är en fundamental del av matematiken och används flitigt många områden bland annat inom astronomin för att kunna bestämma planetbanorna, ekonomer för att analysera börskurvor, i industrin för att hitta maximal vinst, man kan beskriva elektroner och andra elementarpartiklars interagerande vilket är grunden för mycket kemi, kärnkraft, och nanoteknik, man kan beskriva elektromagnetisk strålning vilket är grunden till all elektronik och trådlös kommunikation och mycket mycket mer.

Syftet med uppsatsen är att få en bättre bild av hur derivatan framkommit. De flesta vet att Newton och Leibniz hade en viktig roll i utvecklingen, men här tittar vi även på hur andra matematiker bidragit till derivatans utveckling. Men även utvecklingen efter Newton och Leibniz och varför man inte var nöjd med deras metod. Som avslutning skriver jag även kort om utvecklingen av icke-standard analys för att få en inblick i hur den fungerar. Mina frågeställningar har varit:

- Hur utvecklades derivata?
- Vilka utvecklingar inom matematiken har lett fram till derivatan?
- Hur utvecklingen av derivatan set ut för att ge oss den definition vi har idag?

Uppsatsen är en historiskt beskrivande litteraturstudie av derivatans uppkomst och utveckling. Litteratursökningen har i huvudsak genomförts i Umeå universitets databaser och bibliotek. Detta har varit en litteraturstudie av en mängd olika historieböcker som varit inriktade på matematiska personer och deras bidrag. De viktigaste böckerna har varit [7] och [9], utifrån dessa böcker har jag tittat närmare på några av deras referenser och på så sätt kunnat utvidga mitt sökande av litteratur.

Här följer en översikt av uppsatsen, den är begränsad till att titta på de mest framstående personerna som bidragit till derivatans uppkomst och utveckling, den är även begränsad till att titta på reellvärda funktioner av en variabel.

I kapitel 2 kommer jag att ta upp den matematiska utvecklingen som leder fram till att man har kunnat skapa differentialkalkylen. Bland annat hur man redan under antiken utvecklade geometriska metoder för att hitta tangenter till en kurva [5, sida 20], hur Francois Viète utvecklade symbolspråket och Rene Descartes utvecklade koordinatsystemet [12]. Vi kommer även att se hur Rene Descartes och Pierre de Fermat utvecklade nya metoder för att hitta tangenter till en kurva.

I kapitel 3 har jag skrivit om skaparna av derivatan, Leibniz och Newton, hur de går från att hitta tangenter till att hitta derivatan och vilka tankar de hade om sin version av derivatan.

Kapitel 4 handlar om utvecklingen av derivatan efter Leibniz och Newton och hur Augustin Louis Cauchy och Karl Theodor Wilhelm Weierstrass kommer fram till hur man mer strikt kan definiera derivatan. Avslutningen på detta kapitlet handlar om Abraham Robinsons icke-standardanalys som strikt kan definiera en derivata med samma tankesätt som Leibniz och Newton hade.

2. Tangenter och subtangenter

I detta avsnitt kommer vi att titta närmare på de framsteg inom matematiken ledde fram till Newton och Leibniz arbete.

2.1. **Det antika Grekland.** Långt innan begreppet derivata uppkom intresserade man sig för kurvors egenskaper. Vi börjar att titta på matematiken några hundra år f.Kr. Då var man bland annat intresserad av att hitta tangenter till kurvor. Bland de första som började söka tangenter till kurvor var matematikerna i det antika Grekland. Deras definition av en tangent såg ut på detta sätt [9, sida 5-6].

Definition 2.1. *Tangenten* till en kurva är en rät linje med de två kriterierna

(1) Linjen måste ha en punkt gemensam med kurvan
(2) Inga andra punkter på linjen ligger på kurvan

Men de kunde inte undersöka vilka kurvor som helst, de kunde bara hitta tangenter till en viss typ av kurvor, nämligen de man får från kägelsnitten.

Definition 2.2. Ett *kägelsnitt* är den kurva som bildas av skärningen mellan ett plan och en cirkulär konisk yta.

Beroende på hur planet skär den cirkulära koniska ytan erhålls en *ellips*, en *parabel* eller en *hyperbel.* Detta under förutsättning att planet inte går genom den koniska ytans spets, då blir skärningen bara ett par räta linje.

Man använde tangenter exempelvis inom astronomin och även för att hitta ett förhållande mellan en cirkels diameter och omkrets, alltså det vi idag känner till som π [6, sida 133].

Med hjälp av tangentens definitionen kunde grekerna bestämma tangenten.Detta gjorde man med argumentation och geometriska bilder, men utan att ha tillgång till något symbolspråk. Det gjorde att man för varje kurva och varje ny punkt i kurvan var tvungen att konstruera en ny tangent [9, sida 5-6]. Den matematiska texten *Elementa* som skrevs av den berömda matematikern Euklides ca 300 f.Kr. innehöll en sammanställning av den matematiska kunskapen dittills och för att kunna bevisa att en linje är en tangent till en kurva behövs grundsats 5 från boken *Elementa* [6, sida 80] som lyder:

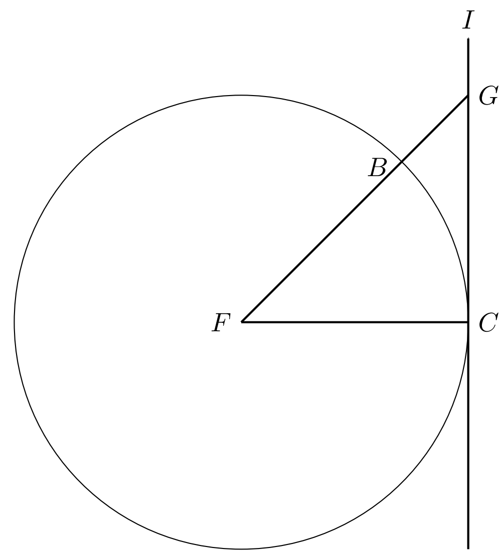
Sats 2.3. *Det hela är större än delen.*

Euklides satser var som denna, väldigt allmänna men de kan användas som i följande exempel då vi ska bevisa att en linje är tangenten till en cirkel i punkten C enligt figuren 2.1

Exempel 2.1. Vi ska visa hur man ritar upp en tangent till en cirkel. Vi ska visa att linjen I är tangenten till vår cirkel som går genom punkten C, se figuren 2.1.

Beviset för tangenten är indirekt: Låt linjen I tangera cirkeln i punkten C. Låt F vara cirkelns medelpunkt och drag radien FC. Vi ska visa att FC bildar en rät vinkel med tangenten I.

Antag att så inte är fallet. Då kan vi dra en annan linje som vi säger är normal till linjen I från F genom G. Eftersom vinkel FGC då kommer att vara rät är vinkeln FCG spetsig. I triangeln FGC är då vinkeln FCG mindre än FGC, och därför är sidan FC längre än FG. Men $FC = FB$ och därför är också FB större än FG. Men FB är en del av FG vilket ger en motsägelse enligt sats 2.3. Detta medför alltså att FC måste vara vinkelrät mot linjen I.



Figur 2.1 – Tangent till en cirkel

□

Det var dessa typer av bevis som matematikerna på den tiden sysslade med. Vi vet att Euklides, som var en framstående matematiker född omkring 325 f.Kr. skrev om kägelsnitten och att man upptäckte dem i sambans med att man försökte fördubbla kuben, dessa verk har dock förlorats [14, sida 285]. Det finns som tur är andra som har skrivit om kägelsnitten. En av de mest berömda som skrev om kägelsnitten och hur man hittar tangenter till dem Apollonius som kom från Perga (södra delen av mindre Asien) och levde mellan 262-190 f.Kr [14, sida 285]. Apollonius skrev om kägelsnitten i verket *Konica*, det omfattade åtta böcker och innehöll ca 400 satser, bland dessa satser fanns även satser om tangentkonstruktioner till kägelsnitten [15, sida 6]. Apollonius reste till Alexandria för att studera vid Museion vilket var en forskningsinstitution i antikens Alexandria i Egypten runt 250 f.Kr. där Apollonius grundade sitt matematiska kunnande genom att studera Euklides verk *Elementa*. Apollonius *Konica* består av åtta böcker, fyra som bevarats på grekiska, tre på bevarats på arabisk översättning och en som är förlorad. Apollonius ger i dessa verk en fullständig framställning av kägelsnitten [14, sida 285-286]. Anledningen till att vi vet att en bok har blivit förlorad är att det enligt en inledande text i den första boken står

> ”... Jag tror inte du har glömt att jag berättade för dig att jag genomfört denna undersökning på Naucrates geometrikerns begäran, vid den tiden när han kom till Alexandria och bodde hos mig, och att när jag hade genomfört arbetet i åtta böcker gav jag honom dem genast, lite för snabbt, eftersom

> han just skulle segla iväg; jag hade därför inte hunnit rätta dem, i själva verket hade jag skrivit ner allt just som det föll mig...”[6, sida 124].

Det finns ett undantag till de kurvor som man försökte hitta tangenter till förutom kägelsnitten, det var Arkimedes spiral.

Definition 2.4. *Arkimedes spiralen* är den plan kurva som genereras av en punkt som rör sig bort från eller mot en fast punkt med en konstant hastighet medan radiusvektorn från den fixerade punkten roterar med en konstant hastighet.

Förutom att skriva om tangenter var Apollonius först med begreppet variabel som matematikhistoriskt kom att spela en stor roll [14, sida 286-287]. En annan viktig person under Antiken var Diophantos som levde omkring 250 e.Kr. i Alexandria. Hans stora verk är känt under namnet *Aritmetika* som bestod av 13 böcker men av dem finns det endast 6 stycken bevarade. Böckerna innehåller början till ett sätt att skriva matematik med symboler[9, sida 6], istället för kilskrift eller hieroglyfer som användes tidigare [6, sida 14, 33]. Enligt Diophantos notationer skriver man $K^Y\overline{\alpha}\ \overline{\sigma\gamma}\ \Psi\ \ \triangle^Y\ \overline{\beta}\ \dot{M}\overline{\iota\delta}$. Där K^Y är en kub, $\triangle^Y$ är en kvadrat, Ψ fungerar som ett minustecken och de grekiska bokstäverna är siffror. Idag skulle det uttrycket se ut på detta sätt $x^3 - 2x^2 + 3x - 14$ [6, sida 153-155]. Detta kommer vara en bra utgångspunkt för Francois Viète som kommer att göra nästa stora framsteg i algebrans utveckling vilket var en förutsättning för att kunna utveckla och generalisera derivatan [9, sida 6]. Vi kommer läsa mer om detta i nästa avsnitt.

2.2. **Francois Viète (1540-1603).**

2.2.1. *Utveckling av symbolspråket.* Francois Viète var född 1540, i Fontenay och dog 1603 i Paris. han var en av de främste matematikerna i Frankrike vid den tiden. Han studerade juridik i Paris och arbetade sedan som jurist, han hade en hög ställning inom det franska hovet, bland annat för att han var duktig på att dechiffrera koder. Men för att se vad han gjort för derivatans utveckling får vi titta på hans insatser inom algebran där Viète avsevärt förbättrade formalismen. Han införde användandet av bokstäver som beteckning i stället för tal, både konstanta och obekanta termer i ekvationer. Han lät vokaler ersätta de obekanta variablerna och konsonanter ersätta de konstanta termerna. Utöver det så införde han även användandet av additions och subtraktions tecken så som vi har dem idag [9, sida 6-7].

Viète kallade sin algebra för analys och för honom betydde algebran en speciell procedur för att göra nya upptäckter [7, sida 279-280]. Viète generaliserade det som man i det antika Grekland kallade för *arithmos* och kallade detta för *specie* [14, sida 402].

Definition 2.5. *Arithmos* är läran om grekiska tal begreppet och den teoretiska matematiken [14, sida 222].

Viète införde fyra specifika regler för räkning med specie som gäller addition, subtraktion, multiplikation och division. Han använde notationerna $A + B$, $A - B$, $A\ in\ B$ (för multiplikation) och A/B (för division). För addition och subtraktion införde Viète även en restriktion (homogenitetslagen) vilken innebär att endast *spicies* av samma ordning får adderas och subtraheras [14, sida 404].

Exempel 2.2. Så här skulle det se ut om Viète skulle skriva en ekvation

$$A\ cubus + B\ plano\ 3\ in\ A\ aequari\ C\ solido\ 2.$$

Om vi skulle skriva det idag skulle det se ut så här

$$x^3 + 3B^2x = 2C.$$

□

Som vi ser blir det inte riktigt likt det sätt vi skriver idag med olika exponenter på termerna. Notera i exempel 2.2 att varje term är av samma ordning, enligt Viète måste uttryckets alla termer som ska adderas eller subtraheras vara av samma ordning och är alltså inte tillåtet att skriva $x^3 + 3bx = 2C$ då x^3 och $3bx$ inte är av samma ordning. Så varför anser sig Viète tvingad att göra denna inskränkning i en annars generell kalkyl? Jo skälet till att Viète tar med sig denna logik har att göra med spieces natur som ett generaliserat arithmos som hos Euklides är en mångfald av enheter som alla är homogena. Alltså för att bevara sambandet med arithmos får man inte addera eller subtrahera en volym med en yta eller en sträcka eftersom det inte gick att visa rent geometriskt. Man får däremot multiplicera och dividera på det sättet [14, sida 404]. Att jobba med geometri eller algebra i högre dimensioner än 3 ansågs fortfarande absurt på grund av att algebran fortfarande var väldigt bunden till geometrin och att man inte kunde tänka sig fyra dimensioner [7, sida 279].

Vi kan titta på hur Viète löser ett problem enligt [14, sida 406]:

Exempel 2.3. Sök två tal vars summa och differens är givna. Han låter här summan vara 100 och differensen vara 40

Uppställning av ekvationen. Låt de givna talen vara D (summan) och B (differensen) vara givna, vi ska hitta talen A och A+B.

Ekvationen bli

$$A\ solido + (A\ solido + B\ solido) = D\ solido.$$

Lösning en blir:

$$A\ solido = \frac{1}{2} \cdot D\ solido - \frac{1}{2} \cdot B\ solido$$
$$A\ solido + B\ solido = \frac{1}{2} \cdot D\ solido + \frac{1}{2} \cdot B\ solido.$$

Vi vet att $D\ solido = 100$ och $B\ solido = 40$ vilket ger att $A\ solido = 30$ och $A\ solido + B\ solido = 70$.

□

Viètes arbete inom algebran var viktigt men andra stora matematiker bland annat Issac Barrow som vi kommer att skriva mer om i kapitel 3.2.1 motsade sig algebran och senare även analytiska metoder inom koordinatgeometrin eftersom han tyckte att algebran saknade motivering i motsats till geometrin. Motståndet mot att använda algebraiska metoder började vända något när Viète, och senare Descartes använde algebran för att lösa geometriska konstruktionsproblem. Motivationen för mycket av den algebran som dyker upp i Viètes In Artem Analyticam Isagoge är för att lösa geometriska problem och att systematisera geometrisk konstruktion.

Ett av de typiska geometriproblem som Viète löste med algebra från hans verk *Zeteticorum Libri Quinque* är:

Exempel 2.4. Antag att vi har en given area på en rektangel och ett förhållande mellan rektangelns sidor. Viète använde då sin metod för att hitta sidorna på rektangeln. Han använder $B\ plano$ som arean och förhållandet mellan den längre sidan och den kortare sidan som S till R. Låt A vara den längre sidan. Då är RA/S är den mindre sidan. Alltså är

$$B\ plano = A\ plano\ in\ R\ solido/S\ solido$$

och multiplicerat med S ger den slutgiltiga ekvationen

$$B\ plano\ in\ S\ solido = R\ solido\ in\ A\ plano$$

Viète visar med denna ekvation att man kan ta reda på A om man har storheterna B och $\frac{R}{S}$ [7, sida 279].

□

Under 1600-talet erkänns mer allmänt att algebran måste utvecklas för att ersätta och utveckla de geometriska metoder som infördes av grekerna. Även om inte alla matematiker höll med, som t.ex. Barrow som vi nämnt tidigare, så insåg merparten att det var användbart att använda sig av algebran. Det var Viète som först insåg möjligheterna att använda algebran för att hantera likheter och proporsonalitet oavsett om dessa storheter uppstod från geometriska, fysiska eller kommersiella problem. Därför antog han att det skulle fungera för ekvationer av högre grad än tre. Han förutsåg en analytisk vetenskap som använde sig av symboler. Algebran var för Viète bara en bra metod för att lösa geometriska problem.

Men algebran visade sig även vara ett viktigt genombrott inom matematiken och har sedan dess expanderat till det vi har idag.

Viète förbättrade analysprocessen, särskilt för geometriska problem, det var även utgångspunkten för Descartes arbete om koordinatgeometrin [7, sida 279-280].

2.3. **Rene Descartes (1596-1650).** Rene Descartes föddes 1596 i La Haye i Frankrike och dog 1650 i Stockholm. Han hade en examen i juridik, men var även engagerad i filosofi, fysik och matematik. Det intellektuella klimatet var svårt för honom under den tid han bodde i Frankrike på grund utav att den katolska kyrkan fängslade och mördade de som sa saker vilket kunde tolkas som en hädelse mot religionen, som t.ex. att jorden inte var centrum i universum. Därför vågade han inte släppa sina arbeten inom fysik och flyttade senare till Holland där det intellektuella klimatet var bättre. Han kunde i alla fall släppa sina arbeten inom filosofin och matematik kallat *Discours de la methode* (avhandling om metoden). Discours de la methode innehöll även bilagan *La Geometrie* (Geometri) som var viktig för bland annat koordinatsystemets utveckling [6, sida 381].

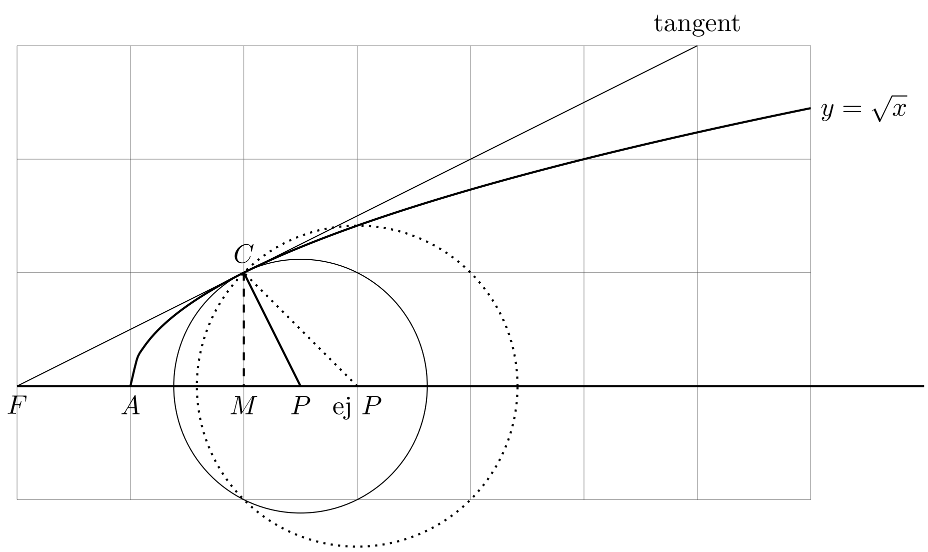
2.3.1. *Koordinatsystemet.* Det är få förunnat att kunna säga att man har förändrat stora delar av matematiken, men det gjorde verkligen Descartes. Inte bara på ett sätt, han hjälpte till att förbättra ekvationsnotationen från det Viète hade skapat. Descartes ändrade även kraven för hur termer med olika gradtal kunde adderas och subtraheras till det vi har idag [15, sida 11]. En annan väldigt viktig utveckling Descartes medförde var skapandet av koordinatsystemet som gjorde det möjligt att kunna beskriva geometriska objekt algebraiskt och att kunna beskriva algebraiska uttryck geometriskt [14, 70-72].

2.3.2. *Normalmetoden.* Descartes utvecklade en ny metod för att bestämma tangenten som kallas för normalmetoden. Det är på grund av att Descartes nu utvecklat koordinatsystemet som vi kan börja prata om normal och subnormal till en kurva

Definition 2.6. *Normalen* kallas den linje som är vinkelrät mot tangenten.

Definition 2.7. *Subnormalen* är den ortogonala projektion av normalen på x-axeln mellan en given punkt x_0 och där normalen skär x-axeln.

Descartes metod gick ut på att utifrån en punkt på en kurva försöka hitta normalen och subnormalen för att utifrån detta kunna hitta lutningen på tangenten. Kortfattat fungerar metoden på så sätt att om man hitta subnormalen kan man bestämma lutningen på normalen eftersom man ha två punkter på normalen att beräkna lutningen från genom $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Från definition 2.6 vet vi att normalen och tangenten är vinkelräta mot varandra kan man då räkna ut vilken lutning tangenten har i punkten där normalen och tangenten möts på kurvan. Vi måste även komma ihåg att Descartes inte hade tillgång till samma funktionsbegrepp som vi har idag men funktionsnotationen har kommit en bit på väg nu när man från Viète har börjat använda konstanter och variabler och Descartes har utvecklat koordinatsystemet. Fig 2.2 illustrerar konstruktionen av tangenten till kurvan $y = \sqrt{x}$ med Descartes normalmetod. Sträckan CF är tangenten till kurvan i punkten C och CP är normalen till denna tangent, det vill säga att CP är vinkelrät mot CF. Sträckan MP är subnormal till CP. Med hjälp av Descartes koordinatsystem kan vi införa beteckningar för sträckor och



Figur 2.2 – Descartes normalmetod

beräkna dem. Vi inför här beteckningarna:

$$C = (x_0, y_0), \qquad P = (v, 0), \qquad s = |PC|,$$
$$M = (x_0, 0), \qquad |MP| = |v - x_0|, \qquad v = |AP|.$$

För att hitta punkten P tittar vi på de cirklar som uppfyller kriterierna:

(1) Cirkelns centrum ligger på x-axeln.
(2) Endast punken C ligger på cirkelns periferi.

Vi ställer upp cirkelns ekvation som stämmer in på de kriterierna genom att sätta cirkelns centrum som $(v, 0)$ och r som radien. Cirkelns ekvation är då

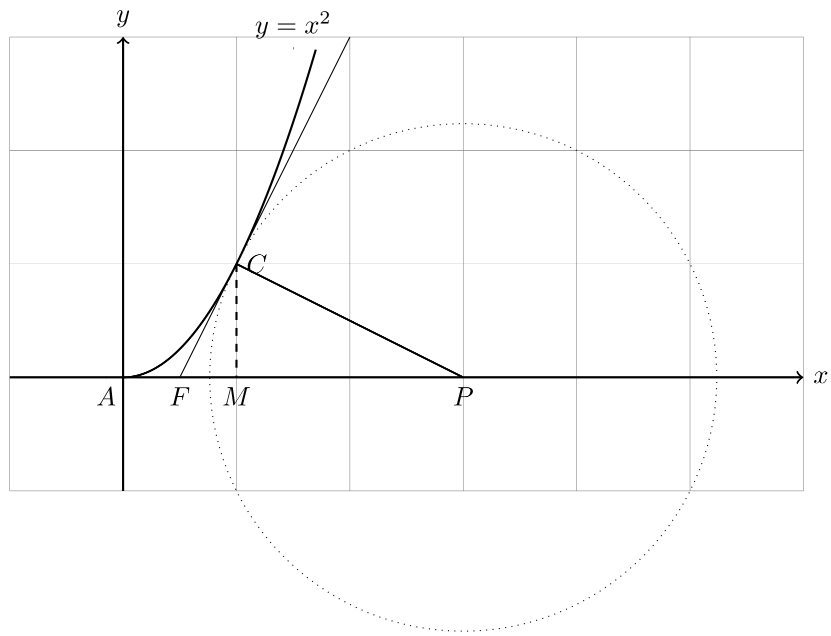
$$(x - v)^2 + y^2 = r^2. \tag{2.1}$$

Därefter tittar vi på skärningspunkterna mellan kurvan och cirkeln. Vi kommer att få två fall. Det första fallet får vi två skärningspunkter vilket ger en motsägelse enligt Descartes kriterier (2). Det andra fallet ger oss en skärningspunkt vilken kommer att sammanfalla med punkten C. Detta stämmer överens med Descartes kriterier (1) och (2). Eftersom vi har en dubbelrot när cirkeln bara har en punkt gemensam med kurvan i $x = x_0$ kan vi beräkna v ur ekvationen (2.1) och vi kan räkna ut subnormalen $|MP| = |v - x_0|$. Genom att titta på kurvan som ges av $y = \sqrt{x}$ får vi från ekvationen (2.1)

$$r^2 = (x - v)^2 + (\sqrt{x})^2$$

som sedan kan skrivas om till

$$0 = x^2 + (1 - 2v)x + v^2 - r^2.$$



Figur 2.3 – Decartes normalmetod

Pq-formeln ger då att

$$x = -\frac{1-2v}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-2v)^2 - 4(v^2 - r^2)}{4}}.$$

Eftersom vi redan konstaterat att det rör sig om en dubbelrot kommer vi titta på när kvadratrotsuttrycket är lika med noll. Vi vet då att om $x = x_0$ får vi dubbelroten $x_0 = -\frac{1-2v}{2}$ från ekvationen. Från detta får även ett uttryck för subnormalen $v - x_0 = \frac{1}{2}$ och från allt detta kan vi med Descartes normalmetod bestämma tangenten. Genom att från våra punkter C och P bestämma lutningen på normalen och utifrån den kan man slutligen hitta att den ortogonala tangentens lutning i punkten C [9, sida 14-18].

Vi ska nu titta på hur vi kan bestämma tangenten för kurvan $y = x^2$ med Descartes metod för en bestämd punkt.

Exempel 2.5. Vi hittar tangenten funktionen $y = x^2$ i punkten $x = 3$. Från figuren 2.3 får vi:

$$\begin{aligned} v =& |AP|, & s =& |PC|, & x_0^2 =& |MC|, \\ P =& (0, v), & x_0 =& M, & |v - x_0| =& |MP|. \end{aligned}$$

Ett sätt att lösa uppgiften är att se på ekvation (2.1) som vi kan skriva om till

$$(x - v)^2 + (x^2)^2 - s^2 = 0.$$

Sedan försöker vi hitta när x_0 är en dubbel rot och får då:

$$\begin{aligned}
x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - s^2 &= (x^2 + ax + b)(x - x_0)^2 \\
&= (x^2 + ax + b)(x^2 - 2x_0x + x_0^2) \\
&= x^4 - 2x_0x^3 + x_0^2x^2 + ax^3 - 2ax_0x^2 + ax_0^2x + bx^2 - 2bx_0x + bx_0^2 \\
&= x^4 + (a - 2x_0)x^3 + (x_0^2 - 2ax_0 + b)x^2 + (ax_0^2 - 2bx_0)x + bx_0^2.
\end{aligned}$$

Koefficienterna framför varje potens måste vara lika i vänster och höger led, alltså måste det gälla att:

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
0 &= a - 2x_0, \\
1 &= x_0^2 - 2ax_0 + b, \\
-2v &= ax_0^2 - 2bx_0, \\
v^2 - s^2 &= bx_0^2.
\end{aligned}$$

Från detta kan man lösa ut vad a och b är samt subnormalen $|v - x_0|$. Vi sätter in $x_0 = 3$ för att hitta tangenten till punkten $(3, 9)$. Från denna punkt får vi att:

$$a = 6, \qquad b = 28, \qquad v = 57 \qquad \text{och} \qquad |v - x_0| = 54$$

Med hjälp av subnormalen kan vi bestämma normalens lutning till $-\frac{1}{6}$. Vilket ger oss lutningen på tangenten som blir 6.

Utifrån tangentens ekvation $y = kx + m$ där k är tangentens lutning i punkten $(3, 9)$ och m är ekvationens värde när $x = 0$ kan vi nu med insättning av $y = 9$, $x = 3$ och $k = 6$ få ut den färdiga ekvationen, vliket ger att.

$$\begin{aligned}
9 &= 6 \cdot 3 + m, \\
m &= -9.
\end{aligned}$$

Detta ger slutligen att tangenten för kurvan $y = x^2$ i punkten (3,9) är

$$y = 6x - 9.$$

□

Normalmetoden var ett bra nytt sätt att hitta tangenten genom att bestämma normal och subnormal. Detta var en klar föregångare till derivatan.

Man kan här se en början till gränsvärde när man flyttar cirkelns medelpunkt efter x-axeln tills man inte får en motsägelse enligt kriterierna (1) och (2). Descartes förklarar i sin metod att ju närmare punkten P man kommer desto tätare ligger rötterna till ekvationen och när man ligger precis på punkten P kommer man ha en dubbelrot. Detta motsvarar ett sorts gränsvärdes tänkande. Men Descartes har ännu inte någon definition på hur ett gränsvärde fungerar och därmed inte någon exakt mening med att två värden närmar sig varandra.

Descartes metod är emellertid bara rimlig att använda på enklare kurvor, eftersom det i praktiken är besvärligt att hitta subnormalen. Descartes själv undersökte endast de fall där y^2 är ett polynom i x [9, sida 14-18].

2.3.3. *Sveriges bidrag till derivatans historia.* Sveriges bidrag till derivatans historia hör ihop med Descartes eller åtminstone hans död. Sveriges dåvarande regent, drottning Kristina hade fått höra talas om den då världsberömda 50 år gamma matematikern och filosofen. Drottning Kristina var nitton år gammal och sades redan vara en duktig regent som även var en väldigt uthållig ryttare, duktig på att fäktas och att jaga. Det sades även att hon var lika tålig mot kyla som en svensk timmerhuggare. Kristina kunde sitta i timtal i ett ouppvärmt bibliotek mitt under den svenska vintern. När hon upptäckte Descartes filosofi ville hon genast att han skulle komma till Sverige för att vara hennes lärare. År 1649 skickade Drottning Kristina amiral Fleming ner till Holland för att hämta Descartes och i oktober kom de iväg mot Sverige. Drottning Kristina visade inte någon känslighet för den känslige och morgontrötta Descartes som inte alls tyckte om kyla. Drottning Kristina hade bestämt att klockan fem på morgonen var en utmärkt tid att ta med sig Descartes till det vinter kalla biblioteket för att studera filosofi. Detta anses vara orsaken eller åtminstone en bidragande orsak till att Descartes bara efter någon månad blev smittad av lunginflammation och dog i februari år 1650 bara fyra månader efter att han anlänt [3, 67-69].

2.4. **Pierre de Fermat (1601-1665).** Fermat var en fransk jurist och dommare i Touluse och även om matematik bara var en hobby för Fermat, gjorde han förstklassiga bidrag till både talteori och differentialkalkyl. Han var även med och utvecklade koordinatgeometrin och vi ser ett inledande arbete inom sannolikhetslära. Men det mesta av Fermats arbete är bara känt genom att han skrev brev till sina vänner om sina upptäckter. Han publicerade bara ett fåtal vetenskapliga uppsatser och några av dem blev bara publicerade efter hans död. Fermat tyckte att talteori hade blivit negligerat. Han klagade även under ett tillfälle att nästan ingen förklarade eller förstod aritmetiska frågor och frågade sig: *"Is it due to the fact that up to now arithmetic has been treated geometrically rather than arithmetically?"* [7, sida 274].

2.4.1. *Fermats tangentmetod.* Subtangenten var viktig för att kunna använda Fermats tangentmetod.

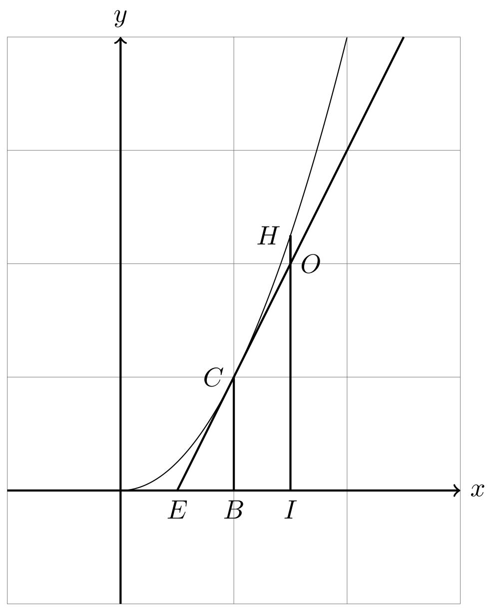
Definition 2.8. *Subtangenten* är den ortogonala projektion av tangenten på x-axeln mellan en given punkt x_0 och där och där tangenten skär x-axeln.

Fermat publiserade sin metod i originaltexten Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam år 1639 men den hade varit färdig ända sedan 1629 [7, sida 344-345].

Med Fermats metod kan vi bestämma tangenten till en kurva i en godtycklig punkt $C = (x_0, y_0)$ genom att hitta subtangenten. Med hjälp av subtangenten kan man hitta lutningen på tangenten eftersom man då har två punkter på tangenten. Lutningen k beräknas genom $k = \frac{y_0}{x_0 - a}$ där $x_0 - a$ ger punkten där tangenten skär x-axeln och därmed längden på subtangenten.

Vi kan nu titta på hur Fermat använde sin metod genom att se på kurvan $y = x^2$.

Exempel 2.6. Vi söker tangenten till punkten $C = (x_0, x_0^2)$. Vi kallar punkterna som gränsar till subtangenten E och B där E är skärningspunkten mellan tangent och x-axeln och B är punkten $(x_0, 0)$. Fermat undersöker nu OI där O är den punkt på tangenten och I en punkt på x-axeln så att OI är parallell med CB. Linjen genom O och I skär kurvan genom en punkt som han kallar H.



Figur 2.4 – Fermats tangentmetod

I figur 2.4 kan man se två trianglar ECB och EOI som är likformiga, därför får vi:

$$\frac{|IO|}{|EI|} = \frac{|BC|}{|EB|}$$

Vilket vi kan skriva om som

$$|EB| \cdot |IO| = |BC| \cdot |EI|$$

Eftersom punkten H ligger på kurvan och inte på tangenten som bildar de likformiga trianglarna så vet vi att $|IH| > |IO|$ och därför gäller inte likheten längre om vi byter ut $|IO|$ mot $|IH|$. Men de är nästa lika med varandra och Fermat använder uttrycket *adaequo* vilket har samma innebörd som proportionalitetstecknet $\approx$. Fermat skriver då

$$|EB| \cdot |IH| \approx |BC| \cdot |EI|. \tag{2.2}$$

Han ersätter termerna i ekvation (2.2)

$$|EB| = a, \qquad |BI| = e, \qquad |BC| = x_0^2,$$
$$|IH| = (x_0 + e)^2 \quad \text{och} \quad |EI| = a + e.$$

Vilket ger att

$$a \cdot (x_0 + e)^2 \approx x_0^2 \cdot (a + e).$$

Utvecklar vi sedan parenteserna och förenklar uttrycket får vi att

$$ae^2 + 2aex_0 \approx x_0^2 e,$$

dividera vi med sedan med e får vi att

$$ae + 2ax_0 \approx x_0^2.$$

Genom att slutligen ta bort termer som innehåller e är Fermat framme vid likheten $2ax_0 = x_0^2$ som efter att vi har dividerat med x_0 och brutit ut a ger oss subtangenten $a = \frac{1}{2}x_0$.

Utifrån sträckorna $a = |EB|$ och $|BC| = x_0^2$ kan vi räkan ut tangenten om vi väljer ett godtyckligt värde för x_0 t.ex. $x_0 = 2$, det ger oss två punkter på tangenten $E = (1, 0)$ och $C = (2, 4)$ som ger lutningen $\frac{4}{2-1} = 4$ på tangenten.

□

Här ser vi att Fermat är inne på något som har ännu större drag från modern differentialkalkyl än vad Descartes hade, till exempel börjar han använda ett tillskott e till det givna x-värdet x_0. Fermat redogör dock inte för hur storheten e skall uppfattas. Idag skulle vi kunna se på e som en infinitesimal. Fermat beskriver inte riktigt hur han tänkte kring storheten e, han förutsatte inte någonting alls om e, inte ens att e är ett litet tal. Han kommer därför inte in på problemen med att man kan dividera med e. Men i sin algoritm säger han att vi kan ta bort alla termer som innehåller e som att e är lika med noll och dessutom byter han då sitt pseudo likhetstecken tillbaka till ett vanligt likhetstecken när e är borta. Fermat förklarar inte särskilt mycket utan presenterar bara sin metod som en algoritm för att manipulera den givna kurvan och få ut subtangenten för att sedan räkna ut tangenten [9, sida 25-28]. Fermat anmärker:

> ”Denna metod slår aldrig fel och kan utsträckas till ett antal vackra problem” [9, sida 28].

Även detta är en bra metod för att beräkna tangenten eftersom vi kommer att få längden på subnormalen för ett godtyckligt värde på x_0. Men till skillnad med Descartes var Fermats metod mindre tidskrävande och lättare att använda. Däremot så var Fermats metod inte förklarad på ett tillfredsställande sätt vilket även Descartes skrev till Fermat i deras brevväxlingar där de diskuterade sina resultat. Deras brevväxling gjorde även att resultaten kunde spridas och fler kunde ta del deras upptäckter [9, sida 24].

3. Derivatans uppkomst

I detta avsnitt kommer vi att få läsa om hur Leibniz och Newton lade grunden till den differentialkalkyl som vi använder idag, vilket var en av de viktigaste utvecklingarna inom matematiken [15, sida 11].

3.1. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Gottfried Wilhelm von Leibniz föddes i Leipzig och var uppvuxen i en fin familj där hans pappa var professor i moralfilosofi. Redan som barn lärde sig Leibniz både grekiska och latin, han hade redan vid 17 års ålder en examen i juridik från Leipzig universitet [9, sida 33]. Han var kunnig inom filosofi, juridik, historia, historisk språkvetenskap, logik, mekanik, optik och geologi och gjorde viktiga arbeten inom flera av dessa områden.

Även om Leibniz hade läst och skrivit om matematik i sitt verk *De Arte Combinatoria* år 1666 säger Leibniz själv att han inte känner till nästan någon matematik fram till 1672. Men år 1673 åkte Leibniz till London för att besöka the royal Socitety of London. Där träffade han många andra matematiker och tog del av deras arbete. Bland annat träffade han Henry Oldenburg som vi vet visste saker om Newtons arbete, vilket kommer att vara en av anledningarna till att Leibnizs blir ifrågasatt och att det senare bråk mellan Newton och Leibniz om vem som var först med differential kalkyl. Detta kommer vi att läsa mer om i avsnitt 3.3 [7, sida 370].

Medan Leibniz fortfarande levde på att vara diplomat gjorde han en mängd viktiga arbeten i olika fällt inom vetenskapen men framför allt inom filosofi och matematik där hans arbete är bland de bästa som producerats. Några av Leibniz idéer kom till honom när han satt och läste böcker av några av hans föregångare till exempel Fermat, Pascal, Descartes med flera. När Leibniz kom på något skrev han ner saker i marginalerna i böcker. Trots de något förvirrade kommentarerna kan vi titta på det han skrivit som hjälp till att förstå hur Leibniz tänkte. Vi ska titta på en kommentar från hans verk *De Arte Combinatoria* om serier av nummer och de första differenserna mellan dem. Leibniz tänkte på en serie kvadrater $f(x) = x^2$ där $x \in \mathbb{N}$, detta ger oss talserien

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...$$

Om vi tar differensen mellan alla på varandra följande tal av denna serien och skapar en ny serie får vi

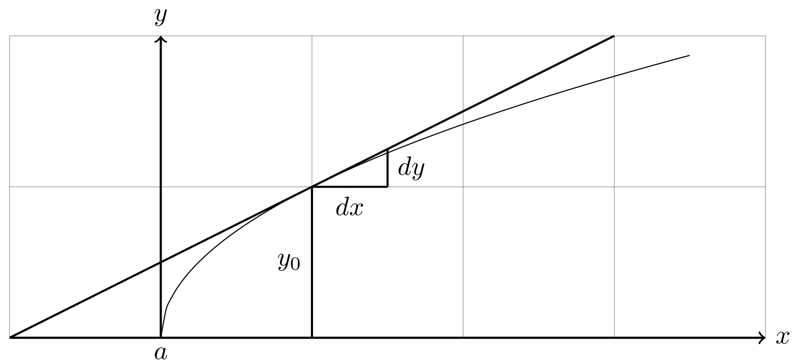
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$$

som vi kan jämföra med $f'(x) = 2x$, som vi ser stämmer detta inte exakt överens med derivatan eftersom differensen är $f(x) = 1 + 2x$ men det är nog för att man ska kunna se likheten och att ökningen $2x$ stämmer överens med derivatan. Fortsätter vi på samma sätt med denna serie får vi serien

$$2, 2, 2, 2, 2, 2, ...$$

vilket vi kan jämföra med $f''(x) = 2$ vilket vi kan se stämmer. Till sist tittar vi återigen på differensen mellan alla på varandra följande tal och får då serien

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, ...$$



Figur 3.1 – Triangeln med katetrarna a och y_0 är likformig med triangeln med katetrarna dx och dy.

som vi kan jämföra med $f'''(x) = 0$ vilket även de stämmer. Från detta kunde Leibniz upptäckta ett mönster som stämmer ganska bra överens med det som senare blev derivatan [7, sida 370-371].

3.1.1. *Liebniz definition av derivatan.* Leibniz utvecklade ett nytt sätt att hitta tangentens lutning. Lutningen ges av förhållandet mellan y och subtangenten a för punkten (x, y) på kurvan. Första gången derivatan användes, även om det inte var de ordet Leibniz använde, var år 1684 i tidskriften *Acta Eruditorium* där definierade Leibniz differentialkalkylen genom likheten $dy : dx = y : a$ [13, sida 258], d.v.s. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$ där a är subtangenten och dx är en ändlig (men väldigt liten) storhet se figur 3.1.

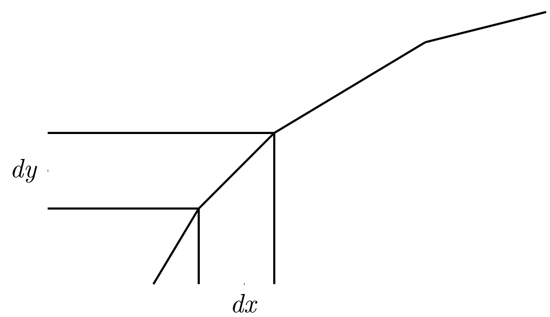
Leibniz föreställde sig kurvan som sammansatt av en oändlig mängd små linjestycken. Dessa linjestycken motsvarar en följd av tätt liggande värden, som genomlöps av såväl x som y se figur 3.2 och 3.3. Differentialen dx kommer från x och är mellan två på varandra följande x-värden. På liknande sätt definieras differentialen dy av y. Leibniz slog fast att tangenten till en punkt (x, y) är den linje som förlänger det oändligt korta linjestycke som är del av kurvan i (x, y) riktningen på tangenten blir följaktligen $\frac{dy}{dx}$. Hans notation av derivatan är likt den som används inom matematiken idag [9, sida 36-41].

3.1.2. *Räkneregler för differentialer.* För att $\frac{dy}{dx}$ ska bestämmas för en funktion behövs regler som talar om hur differentialen av en produkt och en summa av variabler kan beräknas. Leibniz utnyttjade att uppdelningen av kurvan antogs vara så fin att differentialen dx kan anses som oändligt liten jämfört med varje värde av variabeln x. Detta ger likheten $x + dx = x$. Vidare kan vi se att $x \cdot dy + dy \cdot dx = x \cdot dy$ eftersom $dydy$, $dydx$, $dxdx$ är försvinnande liten i jämförelse med xdx, xdy, ydy, ydx [9, sida 37].

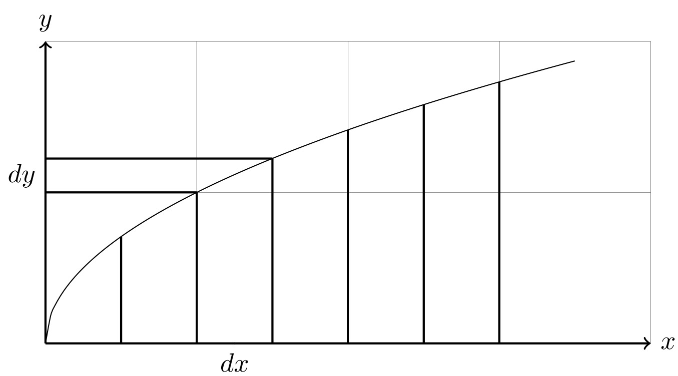
Vi kan titta på ett exempel av hur Leibniz hittar derivatan för en kurva.

Exempel 3.1. Vi ska bestämma $\frac{dy}{dx}$ för kurvan $y = 5x^2 + 4x - 2$ med hjälp Leibniz metod och gör det lilla tillägget dy till y och dx till x och får

$$y + dy = 5(x + dx)^2 + 4(x + dx) - 2.$$



Figur 3.2 – Oändligt små linjestycken i extrem förstoring som Leibniz anser att funktionen är uppbyggd av, linjestyckets lutning blir $\frac{dy}{dx}$.



Figur 3.3 – Figuren visar variablerna x ooch y till ekvationen $y^2 - x = 0$ samt sambandet mellan dx och dy i extrem förstoring.

När vi utvecklat parenteserna får vi

$$dy = 5x^2 + 10xdx + 5dx^2 + 4x + 4dx - 2 - y.$$

Vi sätter $y = 5x^2 + 4x - 2$ och förenklar uttrycket

$$dy = 10xdx + 5dx^2 + 4dx.$$

Vi dividerar med dx vilket ger

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 5dx + 4.$$

Slutligen eftersom termen med $5dx$ är försvinnande liten i jämförelse med $10x + 4$ kan man bortse ifrån termen och resultatet blir

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 4$$

vilket är derivatan för $y = 5x^2 + 4x - 2$ [9, sida 36-37].

□

Genom att använda detta och vanliga räknereglerna för addition och subtraktion till reella tal visade Leibniz bland annat, att dessa räkneregler gäller även för differentialer. Leibniz lyckades även att visa hur man deriverade två polynom som var multiplicerade och dividerade med varandra och skapade på så sätt produktregeln och kvotregel som vi känner till idag.

I Leibniz tidiga papper har man hittat mängder av uträkningar, i ett av hans första försök till att skapa produktregeln som är dokumenterat till 11 november 1675. Vid den tidpunkten testade han fortfarande olika sätt att generalisera räkneregler, under de första försöken prövar han formeln $d(xy) = dxdy$ men efter att ha överlagt kommer han fram till att det blir en motsägelse på grund av att $d(xy) = dxdy$ medför att $d(x^2) = dxdx$. Detta ger oss en motsägelse när vi ser på

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = 2xdx.$$

Alltså förkastar Leibniz det försöket och kommer den 11 juni 1677 fram till att

$$d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx.$$

Leibniz kom fram till detta genom att

$$d(xy) = (x + dx) \cdot (y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx + dxdy.$$

I sista delen av förenklingen kan termen $dxdy$ tas bort eftersom att den är oändligt liten i jämförelse med de andra termerna och vi får uttrycket *d(xy)=xdy+ydx*. Det stämmer även överens med den generella formel vi använder idag.

Vi ser ungefär samma resonemang för kvotregeln. Den 11 november 1675 skriver Leibniz upp formeln

$$d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{dy}{dx}$$

medför att

$$d\Big(\frac{x}{x}\Big) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Detta ger oss en motsägelse när vi ser på

$$d\Big(\frac{x}{x}\Big) = \frac{x + dx}{x + dx} - \frac{x}{x} = 1 - 1 = 0.$$

Leibniz förkastar alltså även denna formel och kommer senare fram till att

$$d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}.$$

Leibniz kom fram till detta genom att

$$d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{(y + dy)x - (x + dx)y}{(x + dx)x} = \frac{xy + xdy - xy - ydx}{x^2 + xdx} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + xdx}.$$

Där kan nämnaren $x^2 + xdx$ kan ersättas med x^2 eftersom xdx är försvinnande liten i jämförelse med x^2. Då kan vi se att Leibniz har fått fram kvotregel som vi känner och använder idag [9, sida 38-39].

Det är inte helt klart exakt vilken betydelse man ska ge till dx och dy vilket Leibniz även blev kritiserad för av andra matematiker, eftersom de vid några tillfällen är skilda från noll och vid andra tillfällen är lika med noll. Leibniz svarade på denna kritik genom att hävda att istället för att använda differentialerna kan man räkna med ändliga storheter, vilka man kan göra hur små man vill. Därmed kommer de regler man använder vid räkning med differentialer att kunna visas gälla exakt. Differentialerna uppträder då som en lämplig förkortning för dessa approximationer. Leibniz formulerar inte något gränsvärdesbegrepp [9, sida 40].

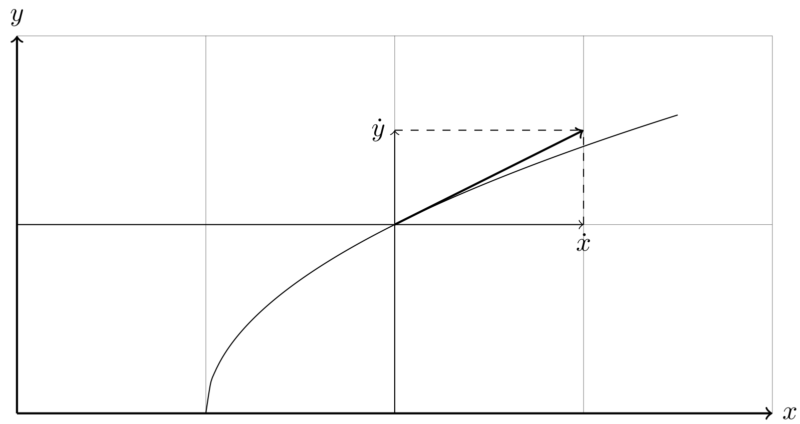
3.2. **Isaac Newton (1642-1727).**

3.2.1. *Isaac Barrow (1630-1677).* Innan vi går in på Newtons bidrag till derivatans uppkomst bör vi nämna Isaac Barrow. Isaac Barrow hade en professur på Trinity College of Cambridge University och var Isaac Newtons föregångare och lärare [6, sida 394]. Han var välorienterad i grekiska och arabiska, han översatte Euklides arbete och förbättrade ett antal av andra översättningar från Euklides, Apollonius, Arkimedes, and Theodosius. Isaac Barrows stora verk The Lediones Geometricae (1669) handlade om differentialkalkyl. Där använde han geometriska metoder som enligt honom var frigjorda från de avskyvärda bördan av uträkningar. Men i lektionsanteckningar man har från honom ser man att han ändå använder sig av uträkningar för att hitta tangenten till kurvor och dessutom är metoden essentiellt detsamma som Fermats [7, sida 346]. Isaac Barrow valde att kliva ner från sin position till förmån för den enligt honom bättre matematikern Isaac Newton [6, sida 394].

3.2.2. *Isaac Newton.* Newton var född 1642 i byn Woolsthorpe där han utbildade sig i de lokala skolorna som inte var av den högsta standarden. Som ung visade han inte någon speciell talang förutom för mekanik. Efter att ha klarat inträdesprovet utan någon tidigare kunskap inom Euklidisk geometri började han på Trinity College of Cambridge University 1661 där han studerade utan att dra någon uppmärksamhet till sig. Newton tyckte inte att han fick någon stimulans från sina lärare förutom möjligen från Isaac Barrow och funderade ett tag på att byta ämne, men bestämde sig lyckligtvis för att inte göra det. Han experimenterade för sig själv och studerade Descartes Giometrie, men även Copernicus, Kepler, Galileo, Wallis och Barrows arbeten. När det gällde differentialkalkylen så generaliserade Newton idéer som redan utvecklats av de matematikerna han studerade. Han lärde sig mycket som student hos Barrow men hans eget arbete var mer influerat av Wallis. Newton sa att hans framsteg inom differentialkalkylen kom genom att han tänkte analytiskt, men Newton ansåg att geometrin var nödvändig för att strikt kunna bevisa något [7, sida 357-359].

3.2.3. *Newtons fluxioner.* I Newtons arbete med differentialkalkyl var även han beroende av infinitesimaler som han kallade för moment. Moment är oändligt korta tidsintervall som är odelbara eller infinitesimala. Hans logik var inte självklar och säger om sitt arbete i *Principia* att hans metod är *"shortly explained rather than accurately demonstrated"*[7, sida 361].

I sina senare arbeten *Tractatus de Quadratura Curvarum* ger Newton en något tydligare förklaring [7, sida 361-365]. Newtons undersökningar av kurvor bygger på uppfattningen av banor för en punkt som rör sig i planet. Punktens rörelse kan beskrivas med hjälp av *abscissan* x och *ordinatan* y där bägge storheterna varierar med tiden. Newton kallar x som varierar med tiden för *fluent* och y som är den hastighet med vilken en fluent varierar för *fluxion*. Newton betecknar fluenten av x som $\dot{x}$ och fluxionen av y som $\dot{y}$. Newtons uppfattning av kurvor innebär att rörelsens hastighet är given om och när kurvan är given.



Figur 3.4 – Newtons derivata med hjälp av fluxionen $\dot{x}$ och fluenten $\dot{y}$

Punktens rörelse är sammansatt av en vågrät rörelse $\dot{x}$ och en lodrät rörelse $\dot{y}$, riktningen och hastigheten för banpunkten kan bestämmas genom att titta på den rektangel där $\dot{x}$ och $\dot{y}$ utgör sidorna. Riktningen och hastigheten för banpunkten kan avläsas som diagonalen i rektangeln som blidas av $\dot{x}$ och $\dot{y}$, se figur 3.4. Det är detta som bestämmer derivatan till kurvan, för att beräkna derivatan tar Newton $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ [9, sida 50-53].

Newtons metod för att hitta derivatan går ut på att beräkna förhållandet mellan fluxionen $\dot{x}$ och fluenten $\dot{y}$. Han gör detta genom att titta på ett oändligt litet tidsintervall som kallades för moment och betäckandes o. Fluenten x kommer under detta intervall få en liten tillväxt som kan betraktas som $\dot{x}o$. Tiden $\dot{x}$ kan anses vara konstant i detta oändligt korta tidsintervallet o, detsamma gäller för hastigheten $\dot{y}$. Under det korta intervallet o kommer punkten (x, y) att röra sig till en ny position på kurvan. Fluenterna x och y kommer att växa med $\dot{x}o$ respektive $\dot{y}o$ till värdena $x + \dot{x}o$ och $y + \dot{y}o$. Eftersom kurvan till ekvationen är given kan vi sätta in $x + \dot{x}o$ istället för x och $y + \dot{y}o$ istället för y [10, sida 7-9]. Vi kan titta närmare på ett exempel till hur Newton räknar ut derivatan till samma kurva som i exemplet 3.1 [9, sida 52].

Exempel 3.2. Vi ska bestämma $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ för kurvan $y = 5x^2 + 4x - 2$ med hjälp av Newtons metod och gör det lilla tillägget $\dot{y}o$ till y och $\dot{x}o$ till x och får

$$y + \dot{y}o = 5(x + \dot{x}o)^2 + 4(x + \dot{x}o) - 2.$$

Utvecklar vi parenteserna får vi uttrycket

$$\dot{y}o = 5x^2 + 10x\dot{x}o + 5(\dot{x}o)^2 + 4x + 4\dot{x}o - 2 - y.$$

Eftersom $y = 5x^2 + 4x - 2$ kan vi förenkla uttrycket till

$$\dot{y}o = 10x\dot{x}o + 5(\dot{x}o)^2 + 4\dot{x}o.$$

Vi dividerar sedan med $\dot{x}o$ och får

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 10x + 5\dot{x}o + 4.$$

Ta vi bort alla termer som fortfarande innehåller o ger det oss uttrycket som också är derivatan

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 10x + 4.$$

Vilket är derivatan för $y = 5x^2 + 4x - 2$.

$\square$

Vi kan se i detta exempel att i Newtons fluxionsräkning spelar storheten o samma roll som storheten e hos Fermat och differentialen dx hos Leibniz. Alltså fick beräkning med fluxioner samma problem med att termer som innehåller o ibland är lika med 0 och ibland är skild från 0 [9, sida 53].

Newton var uppmärksam på att han blev kritiserad för att dividera med noll och försökte förklara hur han tänkte. Han passade även på att klaga lite på hur Leibniz förklarar derivatan med små linjeistycken, men var även självkritisk på sin egen lösning då han tar bort termer som innehåller o. Newton överger infinitesimaler och säger i sitt arbete *Tractatus de Quadratura Curvarum*:

> ”In mathematics the minutest errors are not to be neglected.... I consider mathematical quantities in this place not as consisting of very small parts, but as described by a continual motion. Lines are described, and thereby generated, not by the apposition of parts, but by the continued motion of points... Fluxions are, as near as we please, as the increments of fluents generated in times, equal and as small as possible, and to speak accurately, they are in the prime ratio of nascent increments; yet they can be expressed by any lines whatever, which are proportional to them.” [7, sida 363].

Newtons nya koncept, metoden av slutgiltig kvot leder honom fram till detta: Han överväger funktionen $y = x^n$. För att hitta fluxionerna av y och x^n låter han x genom att vara flytande bli $(x + o)$. Då blir x^n

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots.$$

Ökningen av x och y, alltså, o och $x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$ är till varandra som

$$1 \text{ till } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \cdots$$

(genom att dividera med o). Låt nu alla termer med ökningen o försvinna och den sista proportionen blir

$$1 \;\; \text{till} \;\; nx^{n-1}.$$

Om vi skulle skriva detta idag skulle vi säga att förändringshastigheten av y med avseende på x är nx^{n-1} [7, sida 363-364]. Logiken i detta är inte bättre än i de tidigare versionerna, men Newton säger hur som helst att hans metod är i harmoni med geometrin från de gamla matematikerna och att det inte är nödvändigt att introducera oändligt små storheter [7, sida 363-364].

Newton tyckte inte om och avisar både infinitesimaler och odelbara mängder till förmån för försvinnande delbara storheter. Vilket man skulle kunna se som en föregångare till det gränsvärde som bland annat Cauchy och Weierstrass utvecklar, detta vi kommer att få läsa mer om i kapitel 4.1.1 och 4.1.2. Det mest klara uttalandet om detta var då han beskrev det han kallar för slutgiltiga kvoten:

> ”The ultimate velocity is meant that with which the body is moved, neither before it arrives at its last place, when the motion ceases, nor after; but at the very instant when it arrives. . . . And, in like manner, by the ultimate ratio of evanescent quantities is to be understood the ratio of quantities, not before they vanish, nor after, but that with which they vanish.” [7, sida 365].

3.3. **Dispyten mellan Newton och Leibniz.** Som vi nu har sett har Leibniz och Newton kommit på och definierat derivatan men på lite olika sätt. Det finns likheter i att det i stort sett använder infinitesimaler. Detta leder även till ett bråk mellan dem. Newton var inte särskilt snabb på att publicera sitt arbete och därför blev inget av hans arbete om differentialkalkyl publicerat förrän 1687. Men Leibniz som hade varit på besök i Paris 1672 och i London 1673 där han träffat andra matematiker som visste saker om Newtons arbete. Det är därför han blivit ifrågasatt efter att han 1684, några år före Newton, publicerat sitt arbete om differentialkalkyl. Leibniz blev bland annat anklagad för plagiat och hade en tung period efter detta. Men efter att både Newton och Leibniz dött gjorde en grupp matematiker en grundlig undersökning och kom fram till att båda två oberoende av varandra kom på sin egen variant av derivatan. Det som gjorde att det blev ett bråk var att många matematiker tog var sin sida. Antingen tyckte man att det var Newton som var först eller så höll man på Leibniz. Det var framför allt matematiker från England som höll på Newton och resten av matematikerna på kontinenten tog Leibniz sida. Som resultat av detta slutade matematiker från England och matematiker från resten av kontinenten utbyta idéer med varandra. Eftersom Newton använde mycket geometri i sin metod så fortsatte Englands matematiker att använda geometri under de nästkommande hundra åren efter Newtons död. De kontinentala matematikerna använde sig av och utökade Leibniz metod vilket visade sig vara mycket mer effektivt, vilket resulterade i att Englands matematiker hamnade efter i matematikens utveckling. Matematiken som ämne kanske även skulle ha fått ännu fler stora upptäckter om man inte bråkat utan istället samarbetat och tagit del av vad andra matematiker publicerat och även låtit andra ta del av de som man själv publicerat [7, sida 357-359].

4. Derivatans moderna definition

I detta kapitlet kommer vi att få läsa om hur derivatan och dess definition har förändrats till den standardanalys vi använder idag, vi kommer även ge en kort introduktion till icke-standard analys.

4.1. Den moderna definitionen av derivatan.

Under det följande århundradet efter att Newton och Leibniz utvecklat derivatan användes den inom flera områden. Man utvecklar tekniken och började studera kurvor för att hitta min- och max punkter samt krökning. Man ställde även upp differentialekvationer och uppfinner lösningsmetoder. Differentialkalkylen var en succé inte minst inom astronomin där man lyckades härleda bland annat Keplers lagar för planetbanorna i solsystemet [9, sidan 59-62]. Som vi sett tidigare så fanns det oklarheter med både Leibniz och Newtons definitioner och det visste de själva också. Båda två samt deras efterföljare blev hårt kritiserade för att de använde differentialkalkylen på ett slapphänt sätt [9, sidan 62]. Oklarheterna kring derivatans definition skingrades då Augustin Louis Cauchy år 1821 formaliserade definitionen av gränsvärdet för en funktions. Följd av Karl Weierstrass som ytterligare förbättrade definitionen. Alltså runt 1800-talet blev matematiker bekymrade över den löst formulerade matematiken när det gällde bland annan differentialkalkyl. För att få en rigorös differentialkalkyl började en grupp matematiker arbeta, där de mest framstående var matematikerna Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) och Frankrike Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) från Preussen (nuvarande Tyskland) [8, 949].

4.1.1. *Augustin Louis Cauchy.*

Cauchy föddes den 21 augusti 1789 i Paris och dog den 23 maj 1857 i Sceaux . redan som liten visade Cauchy sig vara duktig på matematik, en av den tidens främste matematiker Lagrange ha förutsagt Cauchys kommande storhet. Efter att ha studerat vid polytekniska skolan och nationalskolan för vägar och broar blev Cauchy ingenjör men ägnade sig därpå helt och hållet åt vetenskapliga studier. Han blev professor vid polytekniska skolan i Paris. men han blev berövad sin befattning då han vägrade att avlägga trohetsed vid Julirevolutionen år 1830. Vid återkomsten till Paris 1838 valdes han till medlem av Bureau des longitudes och efter 1848 blev han åter professor vid Sorbonne. Hans namn tillhör de 72 som är ingraverade på Eiffeltornet. [3]

Cauchy skriver år 1821 i sitt arbete *Cours d'analyse* om att utveckla de grundläggande teoremen i differentialkalkylen så noggrant som möjligt [8, sida 948]. I sina anteckningar skrev han:

> ”When successive values attributed to a variable approach indefinitely a fixed value so as to end by differing from it by as little as one wishes, this last is called the limit of all the others. Thus, for example, an irrational number is the limit of diverse fractions which furnish closer and closer approximate values of it.”[8, sida 950]

Detta var ett olyckat exempel eftersom många uppfattade detta som en slags definition för de irrationella talen i termer av gränsvärde, men vid den tiden trodde man att de irrationella talen inte fanns och det var därför ett meningslöst gränsvärde. Cauchy utelämnade därför detta ur sina verk som han släppte 1823 och 1829. Han säger även att för att kunna prata om en funktions kontinuitet måste man känna till de huvudsakliga egenskaperna för oändligt små storheter.

> ”One says ... that a variable quantity becomes infinitely small when its numerical value decreases indefinitely in such a way as to converge to the limit 0”

Detta uttalande klargjorde även de oändligt små tal som Leibniz tänkte sig och frigjorde den från metafysiska band. Cauchy beskriver på samma sätt vad som sker när värdet istället går mot oändligheten. Med notationen ∞ menar han inte en fixerad storhet utan något odefinierat stort [8, sida 951].

Med detta på fötterna ansåg sig Cauchy redo att definiera begreppet kontinuerlig funktion

Definition 4.1. Låt $f(x)$ vara en funktion av variabeln x, och anta att för varje värde av x mellan två givna gränser, tar denna funktion ständigt ett ändligt och unikt värde. Om man börjar med ett värde av x som ligger mellan dessa gränser, tilldelas variabeln x en oändligt liten ökning α, funktionen kommer själv att anta skillnaden $f(x+\alpha)-f(x)$ som kommer att bero på både den nya variabeln α och på den värdet av x. På grund av detta kommer funktionen $f(x)$, som ligger mellan de två gränser som tilldelas variabeln x, vara en kontinuerlig funktion av variabeln om, för varje värde på x mellan dessa två gränser minska det numeriska värdet av skillnaden $f(x+\alpha)-f(x)$ minska obegränsat med α.

Med andra ord kommer funktionen $f(x)$ att förbli kontinuerlig med avseende på x mellan de givna gränserna, om det mellan dessa gränser alltid stämmer att en oändligt liten ökning av variabeln alltid producerar en oändligt liten ökning av själva funktionen. Vi säger också att funktionen $f(x)$ är en kontinuerlig funktion av x i närheten av ett visst värde som tilldelas variabeln x. Så länge funktionen är kontinuerlig mellan de två gränserna för x, oavsett hur nära gränserna som ger det aktuella värdet ligger. Avslutningsvis säger Cauchy även att en funktion är diskontinuerlig i en punkt x_0 om den inte är kontinuerlig i alla intervall runt x_0 [8, sida 951-952].

4.1.2. *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.* Weierstrass föddes 31 oktober i Ostenfelde (Preussen i nuvarande Tyskland) och dog den 19 februari 1897. Weierstrass visade redan som ung begåvning i matematik och skickades till universitetet i Bonn av sin pappa för att studera juridik. Men Weierstrass ägnade lite tid åt sina studier och blev senare lärare i matematik på gymnasienivå. Han ägnade allt sitt intresse åt funktionsteorin och efter att hans publiceringar blev upptäckta fick han en professur och hans föreläsningar i den nya funktionsteorin blev snart inspirationskälla för elever från hela Europa. Efter år 1850 var han länge sjuk, men publicerade ändå verk som gav honom berömmelse. Han dog av lunginflammation den 19 februari 1897 i Berlin.[3]

Weierstrass fortsatte arbetet som Cauchy påbörjat. Under mitten av 1800-talet arbetade Weierstrass för att differentialkalkylen ska bli ännu mer rigorös. Mycket av arbetet gjorde han mellan åren 1841-1856 då han fortfarande var gymnasielärare men det blev inte känt förrän han började hålla föreläsningar vid Berlins universitet 1859. Weierstrass formulerade definitionen för en funktion är kontinuerlig alltså hur ett gränsvärde fungerar.

Definition 4.2. Om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x-a| < \delta$, så gäller att

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

så säger vi att gränsvärdet av $f(x)$ är L när x närmar sig a, och vi skriver det som

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

[2, sida 89].

Detta leder till att man kan formulera den definition av derivata vi har idag.

Definition 4.3. *Derivatan* av en funktion $f(x)$ är en ny funktion $f'(x)$ som definieras av

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

för alla punkter x där gränsvärdet existerar (d.v.s. är ett ändligt reellt nummer). Om $f'(x)$ existerar säger vi att f är deriverat med avseende på x [2, sida 100].

4.2. **Abraham Robinson (1918-1974).** Som vi har läst tidigare utsattes Fermat, Leibniz och Newton för kritik på grund av att de använde storheter som både räknades som noll och skilda från noll. Efter att Weierstrass definierat gränsvärdet behövdes inte infinitesimala storheter längre och man använde därför inte dessa.

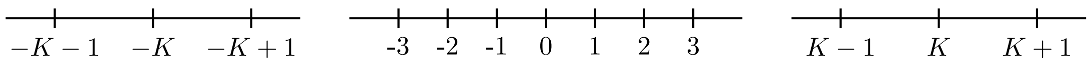
Abraham Robinson, som var en tysk-amerikansk föddes den 6 oktober 1918 i Waldenburg som då låg i Tyskland men nuvarande Wałbrzych i Polen. Han flyttade till Brittiska mandatet av Palestina 1933 där han skaffade sin första examen från Hebrew University. Robinson var i Frankrike när nazisterna invaderade under andra världskriget. Han lyckades fly med tåg och till fots,under flykten träffade på franska soldater som han ville dela sin karta med eftersom Robinsons karta var mer detaljerad än soldaternas. Han kom tillslut till London där han deltog i franska flygvapnet och bidrog till krigsinsatsen genom att lära sig aerodynamik och bli expert på vingprofiler. Efter kriget arbetade Robinson i London, Toronto och Jerusalem, men hamnade på i slutändan vid University of California, Los Angeles 1962, där han även dog den 11 april 1974.

Abraham Robinson försökte att strikt skapa bevis för att man kan använda och göra beräkningar med infinitesimaler. Detta kallas för Icke standard analys[11, sida 3]. Det ska även nämnas att icke-standardanalys är lika rigorös som den standardanalys vi är van vid, så allt vi kan göra och bevisa där kan man även göra och bevisa i icke-standardanalys.

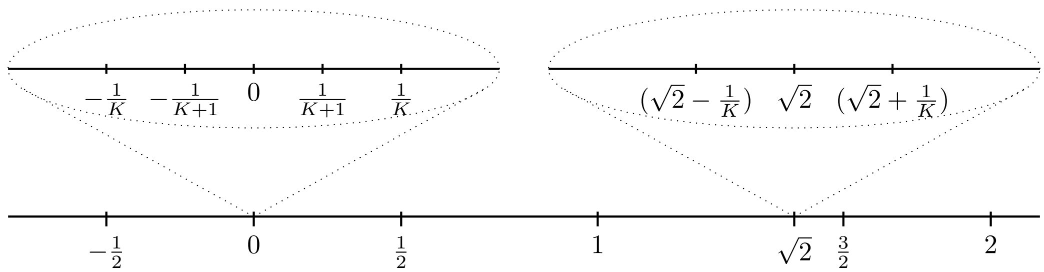
4.2.1. *Icke-standarsanalys.* För att kunna skapa infinitesimaler behöver vi utvidga vårt talsystem. De så kallade hyperreella talen inkluderar alla reella tal men även tal som är större än och mindre än något reellt tal. De hyperreella talen betecknas $^*\mathbb{R}$.

Man utvidgar de reella talen genom att anta att det finns ett tal K som är större än varje reellt tal, och att de vanliga räknereglerna gäller för det nya talet K, [1, sida 49,55]. Finns det ett sådant tal så måste det finnas många sådana tal, till exempel $K+1$ och $K+2$ och så vidare. Vi kan skriva ut våra reella tal och K på en uppdelad tallinje eftersom de aldrig kommer att mötas hur långt man än räknar upp från de reella talen eller hur långt ner man räknar från K, se figur 4.1 [1, sida 49,55].

När vi har lagt till tal som är större än alla reella tal så kommer vi också att ha lagt till tal som är mindre än alla reella, tal det vill säga $\frac{1}{K}$, vi kallar sådana små tal för infinitesimaler. Det finns dessutom graderingar inom infinitesimaler $\frac{1}{K} > \frac{1}{K+1} > \frac{1}{K+2}$ och så vidare. Det är särskilt intressant att titta på de hyperreella tal som ligger infinitesimalt nära ett givet reellt tal.



Figur 4.1 – Tallinjer av de naturliga talen och talet K som är större än alla de naturliga talen.



Figur 4.2 – Monader kring talen 0 och $\sqrt{2}$
.

Definition 4.4. Låt x_0 vara ett reellt tal. *Monaden* till x_0 är mängden av alla hyperreella tal x sådana att $x - x_0$ är infinitesimalt.

Med andra ord är monaden det område runt ett reellt tal där alla infinitesimala tal ryms, se figur 4.2 [1, sida 56-57].

Räkning med infinitesimaler fungerar i princip så som det gjorde för Leibniz differentialer, se exempel 4.1. Att göra det rigoröst kräver mycket teori som vi inte kommer att gå igenom här men är man intreserad av att läsa mer kan jag hänvisa läsaren till [1, Kapitel 3]. Man kan dock utvidga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ så att de blir funktioner från $^*\mathbb{R}$ till $^*\mathbb{R}$. För de flesta elementära funktioner, som $f(x) = x^2$, följer detta direkt från räknereglerna för infinitesimaler.

För en funktion som $f(x) = x^2$ så gäller att om vi ändrar x med ett infinitesimalt värde så kommer även $f(x)$ ändras med ett infinitesimalt värde. Detta ger oss ett alternativ till att använda den vanliga gränsvärdesdefinitionen för derivatan som Weierstrass etablerade i definition 4.3.

Sats 4.5. *Låt f(x) vara en funktion från (a, b) till $^*\mathbb{R}$ och $a < x_0 < b$, där x_0 är ett reellt tal. Studera funktionen*

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Låt C vara ett reellt tal. Då gäller att $f'(x_0) = C$ om och endast om

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = C$$

för alla $x \neq x_0$ i monaden för x_0.

Observera att $f'(x_0)$ är given klassiskt med $\lim_{x \to x_0} k(x)$ när gränsvärdet existerar. Men genom att använda hyperreella tal får vi alltså en annan definition av derivatan som är korrekt och är mer lik den som Leibniz ursprungligen använde. Vi kan använda sats 4.5 för att enkelt bevisa andra matematiska satser om derivator.

Sats 4.6. *Om f(x) är deriverbar i x_0, där x_0 är ett reellt tal, så är $f(x)$ kontinuerlig i x_0.*

Bevis. En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i x_0, där x_0 är ett reellt tal, om $f(x)$ ligger i monaden till $f(x_0)$ för varje x i monaden till x_0. Om $f(x)$ är deriverbar i x_0 så gäller för alla $x \neq x_0$ i monaden till x_0 att $f(x)-f(x_0) = C(x-x_0)$ där C är derivatan av $f(x)$ i x_0. Eftersom $x-x_0$ är infinitesimalt är alltså $f(x) - f(x_0)$ också infinitesimalt. Alltså ligger $f(x)$ i monaden för $f(x_0)$, det vill säga $f(x)$ är kontinuerlig i x_0. □

[1, sida 68-69] Nu kan vi istället för att använda gränsvärden arbeta med infinitesimaler på samma sätt som Leibniz sa att man skulle kunna göra.

4.2.2. *Att använda infinitesimaler.* Robinson skriver om idén att oändligt små storheter talar till vår intuition och att användandet av infinitesimaler var välanvänd, inte minst utav Leibniz som sa att man i teorin om infinitesimaler kunde introducera ideella nummer som skulle få vara oändligt små eller oändligt stora jämfört med de reella talen. Leibniz fick en hel del kritik för det och man tyckte att det inte kunde vara ett oändligt litet utrymme mellan två reella tal och det blev ersatt av den klassiska teorin om gränsvärden. Men i och med att Robinson rigoröst bevisat att infinitesimaler fungerar blev det en revansch för Leibniz idéer som härmed har blivit rättfärdigade [4, sida 2]. Som avslutning på denna uppsats ska vi ta och titta på ett exempel där vi ska beräkna derivatan till kurvan $f(x) = 5x^2 + 4x - 2$ med hjäp av våra infinitesimaler.

Exempel 4.1. Vi ska nu beräkna derivatan för funktionen $f(x) = 5x^2+4x-2$ med hjälp av våra infinitesimaler. Vi vet att lutningen på en funktionen får vi från $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ och vi kommer att öka och minska x med ett infinitesimalt tal $\frac{1}{K}$ som vi kallar x_0.

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{(x+x_0)-(x-x_0)} \\ =& \frac{(5(x+x_0)^2 + 4(x+x_0) - 2) - (5(x-x_0)^2 + 4(x-x_0) - 2)}{2x_0} \\ =& \frac{20xx_0 + 4x_0}{2x_0} = \frac{20x+8}{2} = 10x + 4. \end{aligned}$$

□

Här ser vi att vi får fram derivatan $10x + 4$ med hjälp av infinitesimaler.

Referenser

[1] Abraham, R. (1995). *Non-standard Analysis.* Prinston university Press.

[2] Adams, R. A. (2013). *Calculus : a comlete course -8th ed.* Library and Archives Canada Cataloguing in Publication.

[3] Bell, E. T. (1940). *Matematikens män.* Studentlitteratur Lund.

[4] Dauben, J. W. (1998). *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, A Personal and Mathematical Odyssey.* Princeton University Press.

[5] Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's Elements of Geometry, the Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.*

[6] Johansson, B. G. (1998). *Matematikens historia.* Studentlitteratur Lund.

[7] Kline, M. (1972a). *Mathematical thoughts from ancent to modern times volme 1.* Oxford university Press.

[8] Kline, M. (1972b). *Mathematical thoughts from ancent to modern times volme 3.* Oxford university Press.

[9] Lund, J. (1995). *Från tangent till derivata.* Bokförlaget KUB.

[10] Newton, I. (1710). *Introductio ad Quadraturam Curvarum.* S.I.

[11] Peter Fletcher, e. a. (2017). *Approaches to analysis whit Infinitesimals following Robinson Nelson and others.* arXiv:1703.00425 [math.CA].

[12] Smith, D. E. and Latham, M. L. (1925). *The geometry of Rene Descartes translated from the French and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham.* Dover publications, Inc. New York 10, N.Y.

[13] Swetz, F. J. (2015). *Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus - Differential Calculus.*

[14] Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Natur och kultur.

[15] Wells, R. O. J. (2017). *Differential and Complex Geometry: Origin, Abstractions and Embedding.* Springer International Publishing.