

## Abstract

This paper discusses the Golden Ratio, the Fibonacci numbers and the link between them. The Golden Ratio has fascinated many thinkers of all disciplines – not just mathematicians – during a great number of years. The Golden Ratio,  $\phi$ , expresses a relationship between two different quantities ( $x$  and  $y$ ,  $x > y$ ), where the sum of the quantities ( $x + y$ ) is to the larger quantity ( $x$ ) as the larger quantity ( $x$ ) is to the smaller ( $y$ ), thus  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$ . The Fibonacci numbers,  $f_n$ , are a sequence where each number is the sum of the two preceding numbers, thus  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ . The sequence begins with the numbers 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 (or sometimes with the numbers 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8). There exist relationships between the Fibonacci numbers and the Golden Ratio, *e.g.* the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$  and the Binet's formula  $f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$ .

## Innehållsförteckning

Innehållsförteckning-----	1
1. Inledning-----	2
2. Historisk bakgrund-----	2
3. Fibonacci-----	4
3.1 Leonardo av Pisa-----	4
3.2 Fibonaccis talföljd-----	5
3.3 Binets formel för Fibonaccis talföljd-----	8
4. Gyllene snittet-----	11
4.1 Definition och egenskaper-----	11
4.2 Relation mellan gyllene snittet och Fibonaccis talföljd-----	12
4.3 Gyllene snittet och geometri-----	15
4.3.1 Endimensionell figur-----	15
4.3.2 Tvådimensionella figurer-----	17
4.3.3 Tredimensionella figurer-----	20
4.3.4 Penroseplattor-----	21
4.4 Gyllene snittet i naturen och konsten-----	22
4.4.1 Gyllene snittet i naturen-----	22
4.4.2 Gyllene snittet i konsten och arkitekturen-----	23
5. Avslutning-----	25
6. Referenslista-----	26
6.1 Litteratur-----	26
6.2 Figurer-----	27
Appendix 1-----	28
Appendix 2-----	29

## 1. Inledning

Det här arbetet handlar om gyllene snittet, Fibonaccis talföljd och hur de två kan kopplas samman.

Gyllene snittet (Golden Ratio på engelska) har fascinerat många genom alla tider, vilket nedanstående citat från Livio (2002) visar:

*Some of the greatest mathematical minds of all ages, from Pythagoras and Euclid in ancient Greece, through the medieval Italian mathematician Leonardo of Pisa and the Renaissance astronomer Johannes Kepler, to present-day scientific figures such as Oxford physicist Roger Penrose, have spent endless hours over this simple ratio and its properties. But the fascination with the Golden Ratio is not confined just to mathematicians. Biologists, artists, musicians, historians, architects, psychologists, and even mystics have pondered and debated the basis of its ubiquity and appeal. In fact, it is probably fair to say that the Golden Ratio has inspired thinkers of all disciplines like no other number in the history of mathematics.*

Gyllene snittet,  $\phi$ , uttrycker en relation mellan två olika kvantiteter ( $x$  och  $y$ ,  $x > y$ ), där summan av kvantiteterna ( $x + y$ ) förhåller sig till den större kvantiteten ( $x$ ) så som den större

kvantiteten ( $x$ ) förhåller sig till den mindre ( $y$ ). Alltså är  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$ . Fibonaccis talföljd,

$f_n$ , börjar med talen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 (alternativt med talen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8). Talföljden byggs upp genom att nästkommande tal är summan av de två föregående talen, d v s

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ . Det var den medeltida matematikern Leonardo av Pisa (även kallad Fibonacci) som gjorde talföljden känd. Fibonaccis talföljd ( $f_n$ ) och gyllene snittet ( $\phi$ ) kan

kopplas samman genom gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$ . En annan koppling mellan Fibonaccis

talföljd och gyllene snittet har att göra med ”Binets formel för Fibonaccis talföljd” (vilken definieras i avsnittet 3.3). Binets formel kan t ex användas för att bevisa ovannämnda koppling mellan Fibonaccis talföljd och gyllene snittet.

Detta arbete börjar med en kort historisk resumé för att sätta in Fibonaccis talföljd och gyllene snittet i ett historiskt perspektiv.

## 2. Historisk bakgrund

Antikens Grekland – vår (Europas) kulturs vagga – fostrade många berömda matematiker. En av dessa var Euklides som författade det mest kända matematiska verket genom tiderna, *Elementa* (ca 300 f kr). *Elementa* behandlar dåtidens matematik, i synnerhet geometri och talteori. Verket består av 13 volymer, bok I-XIII, som innehåller definitioner, axiom, postulat och satser. Bok I-VI berör (Euklidisk) geometri, där linjer och plangeometri behandlas i bok I, II, IV och VI, bok III behandlar cirkeln och bok V proportioner. Böckerna VII-X behandlar talteori och aritmetikens grunder. Bok XI innehåller geometri för kroppar, bok XII bevisar cirkelns area och i bok XIII konstrueras de fem platoniska kropparna (se mer om dessa i 4.3.3).

*Elementa* innehåller även den första nedtecknade definitionen av gyllene snittet (kallas där ”extrem och medelkvot”). Gyllene snittet återfinns på flera ställen i *Elementa*, först indirekt (i relation till area) i bok II sats 11 och därefter mer direkt i bok VI sats 30 (i relation till proportioner). Euklides använder sig av gyllene snittet t ex för att konstruera den regelbundna femhörningen (bok IV) och de tredimensionella figurerna dodekahedron och ikosahedron (bok XIII). Dessa tre figurer är nära sammanbundna med gyllene snittet och berörs mera i 4.3.

Efter antiken (ca 600 f kr – 500 e kr) stagnerade den vetenskapliga framväxten i Europa. Den kristna kyrkans makt ökade, vilket ledde till att kyrkan hade ett starkt inflytande över Europas befolkning. Kyrkan favoriserade det andliga och religiösa och ansåg att vetenskapen var oväsentlig och t o m kättersk. Det var istället araberna och indierna som drev vetenskapen framåt, t ex utarbetade de det indo-arabiska talsystemet (vilket är det talsystem vi använder oss av idag). Araberna översatte även mycket av den grekiska litteraturen till arabiska, vilket var tursamt eftersom mycket av den grekiska kulturskatten annars skulle ha gått förlorad.

Under 1100- och 1200-talen började européerna resa och idka handel med länder utanför Europa. Européerna kom på detta vis i kontakt med den arabiska kulturen och de arabiska skrifterna (inklusive de grekiska översättningarna). Man började nu översätta skrifterna till latin och på så sätt kom den grekiska kulturskatten tillbaka dit den en gång i tiden föddes – Europa. Utbytet med araberna ledde inte bara till en reproduktion av gammal kunskap man utvecklade även ett nytt kapitalistiskt handelssystem. Exempelvis uppstod ett behov av växlar och checkar då olika sorters mynt användes i olika delar av Europa. En av dessa nytänkande vetenskapsmän var matematikern Leonardo av Pisa (Fibonacci), ca 1170-1250. Han är mest känd för två saker: Fibonaccis talföljd och för att ha introducerat och populariserat det indo-arabiska talsystemet i Europa.

I och med att européerna kom i kontakt med araberna kom de även i kontakt med det indo-arabiska talsystemet. I Europa vid denna tid räknade man med romerska siffror. Problemet med dessa är att de saknar ett ”positionssystem” (d v s att t ex 234 betyder  $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ ). För att underlätta räkningar med de romerska siffrorna använde man sig av ett slags räknebräde, en s k abakus. Arabisk notation för tal och det hinduiska räknemetoderna var dock till viss del redan kända i Europa, speciellt i Spanien. Genom dess närhet till Nordafrika var det muslimska inflytandet i Spanien stort. Det är därför inte så konstigt att det är här man hittat det äldsta europeiska manuskriptet som innehåller det indo-arabiska talsystemet, ”Codex vigilanus” (976 e kr). Talsystemet spreds dock långsamt till övriga Europa, tidigaste franska manuskript är från 1275. I början ogillades det indo-arabiska talsystemet bl a för att man ansåg att symbolerna gjorde räkenskapsböcker svåra att läsa och för att risken för förfalskningar i böckerna ökade. Motsättningen mot det nya systemet ledde t o m till en kamp mellan s k abakister och algorister. Abakisterna vurmade för det ”gamla” sättet att räkna, med abakus. Medan algoristerna ansåg att det nya systemet var bättre. Det var först på 1500-talet som det indo-arabiska talsystemet ”segrade”. Vilket hänger samman med att man vid denna tidpunkt utsträckte talsystemet till att även gälla tal mindre än ett, vilket ökade dess effektivitet.

Matematiken fortsatte att utvecklas efter Leonardo av Pisa. De grekiska och indo-arabiska matematiska traditionerna sammansmälte och gav upphov till det moderna talbegreppet och den symboliska algebran som vi använder oss av idag. Man kunde nu bl a ge en allmän (algebraisk) lösning av tredjegrads ekvationer, där man tidigare endast kunnat ge numeriska lösningar i vissa specialfall. En av de första matematiska böcker som utkom i tryckt form var *Summa de arithmetica* (1494) skriven av franciskanermunken Luca Pacioli (1445-1517).

Boken behandlar mycket av den matematik som vid denna tid var känd, och innefattar aritmetik, algebra och trigonometri.

Luca Pacioli – som inte bara var matematiker utan även en lärd konstnär – skrev 1509 *Divina Proportione*. Verket sammanband matematiken med konsten och hade en stor inverkan på populariseringen och användandet av gyllene snittet. Pacioli ville med *Divina Proportione* sammanbinda konsten med matematiken och geometrin. Termen gyllene snittet (goldener Schnitt på tyska) anses för första gången formellt ha använts någon gång på 1800-talet av tysken Martin Ohm (1792-1872). I början av 1900-talet betecknade man för första gången gyllene snittet med minuskeln (= liten bokstav) för den grekiska bokstaven för phi,  $\phi$ . Detta till minne av den grekiska skulptören Phidias (490-430 f kr), som antas ha använt sig av gyllene snittet i många av sina skulpturer. Istället för  $\phi$  betecknar man ibland gyllene snittet med  $\tau$ , som i detta fall står för grekiskans *tome* = att skära.

### 3. Fibonacci

#### 3.1 Leonardo av Pisa

Leonardo av Pisa (figur 1), även kallad Fibonacci (Bonaccis son), levde ca 1170-1250. Han föddes i Pisa, men då hans far fick arbete vid den italienska ambassaden i Nordafrika (nuvarande Algeriet) växte Leonardo upp där. Under sin uppväxt i Nordafrika studerade Leonardo bl a matematik och det var här som han först kom i kontakt med det indo-arabiska talsystemet. Som vuxen reste Leonardo mycket i länderna kring Medelhavet (t ex Grekland, Egypten och Syrien) och diskuterade då matematik med lokala vetenskapsmän. Ungefär år 1200 flyttade Leonardo tillbaka till Pisa och skrev där sitt första matematiska verk *Liber Abaci* (= bok om räknekonsten). I detta och senare verk (se nedan) beskrev Leonardo vad han lärt sig under sina resor. Han kan dock även anses vara nyskapande då hans arbeten innehåller material som inte tycks ha någon motsvarighet i den arabiska litteraturen. Leonardo är mest känd för två saker: Fibonacci's talföljd (se 3.2) och för att ha introducerat och populariserat det indo-arabiska talsystemet i Europa. Leonardos arbete inom algebra, geometri och teoretisk matematik anses vara mer avancerat än andras arbeten under Leonardos samtid och hade en stor inverkan på europeisk matematik.



**Figur 1.** Leonardo av Pisa, ca 1170-1250

*Liber Abaci* (1202) behandlar det indo-arabiska talsystemet och hur man räknar med det. Verket börjar med en introduktion av, vad Leonardo kallar, de nio indiska figurerna: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Han presenterar även tecknet 0, och säger att med dessa tio tecken kan alla tal skrivas. Därefter går Leonardo igenom hur man räknar med dessa tal, d v s multiplikation, addition, subtraktion och division samt bråkräkning. Han räknar även med negativa kvantiteter, men då i meningen förlust inom ramen av en affärskalkyl, d v s ”debet”. Leonardo tillämpar räknemetoderna på konkreta vardagliga problem, t ex inom handel och affärsliv, men även problem tillhörande den ”rekreativa” matematiken avhandlades. Fibonacci's talföljd tillkom i detta verk från ett konkret problem (se 3.2). När Leonardo löser problemen gör han det retoriskt, d v s han använder ord istället för ekvationer (vilket vi använder oss av idag). I detta avseende, som i många andra, följde Leonardo araberna. Mot slutet av *Liber Abaci* behandlas kvadrat- och kubikrötter, t ex visas där hur man kan använda sats 5 och 6 i bok II av *Elementa* för att lösa algebraiska problem. *Liber Abaci* var en av de största källorna till spridningen av det indo-arabiska talsystemet!

Andra verk som Leonardo av Pisa författat är:

- *Practica geometriæ* (1220)
- *Flos* (1224)
- *Liber quadratorum* (1225)

*Practica geometriæ* återgav mycket av Euklides *Elementa* och övrig grekisk trigonometri. *Flos* (= blomma) innehåller bl a en analys av tredjegrads ekvationen

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Leonardo visade att denna ekvation inte har någon lösning bland de rationella talen och heller inte bland de irrationella tal som behandlas i Bok 10 av *Elementa*, d v s tal som kan uttryckas

på formen:  $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\dots + \sqrt{a_n}}}}$  (lösningen kan därför inte konstrueras m h a linjal och

passare). Leonardo bevisar detta genom att kontrollera vart och ett av de femton fall Euklides betraktade. Leonardo ger även en numerisk approximation till lösning, dock skriver han inte hur han kommit fram till denna lösning. *Liber quadratorum* (= bok om kvadraterna) innehåller andragsgradsekvationer.

### 3.2 Fibonacci's talföljd

Fibonacci's talföljd är en s k rekursionsformel, d v s en talföljd där på varandra följande termer kan uttryckas med ett matematiskt uttryck, och var den första kända rekursionsformeln i Europa. Talföljden fick sitt nuvarande namn – Fibonacci's talföljd – på 1800-talet av den franska matematikern Edouard Lucas (1842-1891).

Som nämnt tillkom Fibonacci's talföljd från ett konkret problem i verket *Liber Abaci*. Problem behandlar kaninavel:

*En nyfödd kaninhona och en nyfödd kaninhane sätts ut i ett muromgärdat område. Antag att kaninerna blir fertila vid två månaders ålder samt att för varje fertil månad avlar kaninparet en ny hona och en ny hane, som i sin tur börjar avla nya kaniner efter två månader o s v. Hur många kaniner finns det vid månad n om inga kaniner har dött?*



Låt  $f_n$  vara antalet kaninpar vid månad  $n$ , där  $n = 1, 2, \dots$ . Då är  $f_n$  lika med antalet kaninpar för föregående månad, dvs  $f_{n-1}$ , plus antalet nyfödda kaninpar i månad  $n$ . Eftersom kaninerna blir fertila vid två månaders ålder och varje kaninpar avlar ett nytt par varje månad är antalet nyfödda kaninpar i månad  $n$  lika med antalet kaninpar för månad  $n - 2$ . Alltså är

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (1)$$

$$f_1 = f_2 = 1, \quad (2)$$

vilket ger Fibonaccis talföljd  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ .

Detta exemplifieras i figur 2, där varje ring representerar ett kaninpar.

månad (n)	1:a generation	2:a generation	3:e generation	$f_n$
1	○			1
2	○			1
3	○	○		2
4	○	○ ●		3
5	○	○ ● ○	○	5
6	○	○ ● ○ ○	○ ○ ●	8

**Figur 2.** Varje ring betecknar ett kaninpar. Kaninparet i tredje generationen som betecknas av en ifylld ring är avlad av kaninparet i andra generationen som betecknas med en ifylld ring.

Alternativt kan man låta  $n = 0, 1, \dots$  då är

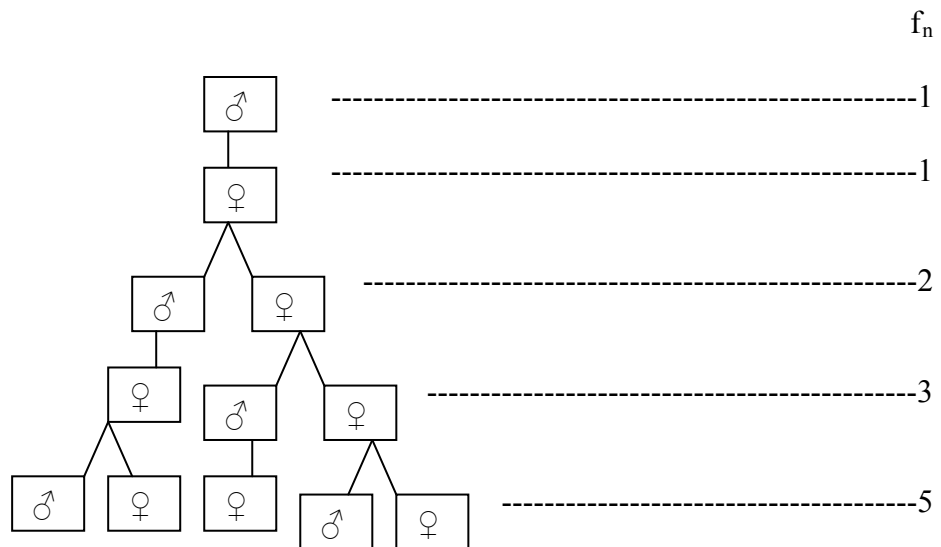
$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1. \quad (3)$$

Fibonaccis talföljd blir då  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ .

En orsak till att Fibonaccis talföljd har blivit så känd är att den kan hittas i många andra exempel förutom kaninavel. Några exempel är:

#### 1. Släktträd för hanbin:

Hanbin kläcks ur ägg som ej är befruktade, dvs de har en förälder – en hona. Honbin kläcks däremot ur ägg som är befruktade, dvs de har två föräldrar – en hona och en hane. Figur 3 visar ett släktträd för ett hanbi, där ♂ representerar hanbi och ♀ honbi. Släktträdet börjar här med ett hanbi och fortsätter sedan med hanbiets förälder osv.



**Figur 3.** Släkträd för ett hanbi. Symbolen ♂ representerar hanbi och ♀ honbi.

På detta vis fås Fibonaccis talföljd 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... .

## 2. Matematiskt problem:

På hur många olika sätt kan man ta sig uppför en trappa med  $n$  stycken trappsteg då man antingen kan ta ett trappsteg i taget eller två på en gång? Låt  $S_n$  beteckna antalet olika sätt man kan ta sig uppför trappan.

Om  $n = 1$  är  $S_n = 1$

Om  $n = 2$  finns det två sätt att ta sig uppför trappan, alltså  $S_n = 2$

Då  $n > 2$  kan första steget tas på två olika sätt. Om ett enkelsteg tas först finns  $(n-1)$  stycken trappsteg kvar och  $S_{n-1}$  olika möjligheter att ta sig uppför de resterande trappstegen. Om ett dubbelsteg tas först finns  $(n-2)$  stycken trappsteg kvar och  $S_{n-2}$  olika möjligheter.

$$\therefore S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

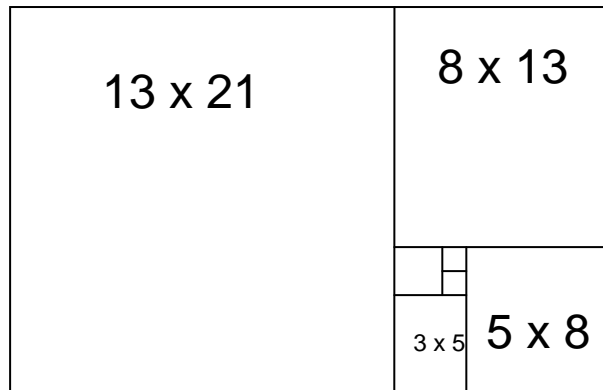
Detta ger talföljden 1, 2, 3, 5, 8, ... . Vilket är Fibonaccis talföljd undantaget första termen, alltså är  $S_n = f_{n+1}$ , där  $f_{n+1}$  fås från ekvation (1).

## 3. Optik

Fibonaccis talföljd kan även hittas i optiken, i reflektion av ljus i glas. Detta fenomen är bra beskrivet i Livio (2002) och Dunlap (1997) och beskrivs alltså inte närmare här.

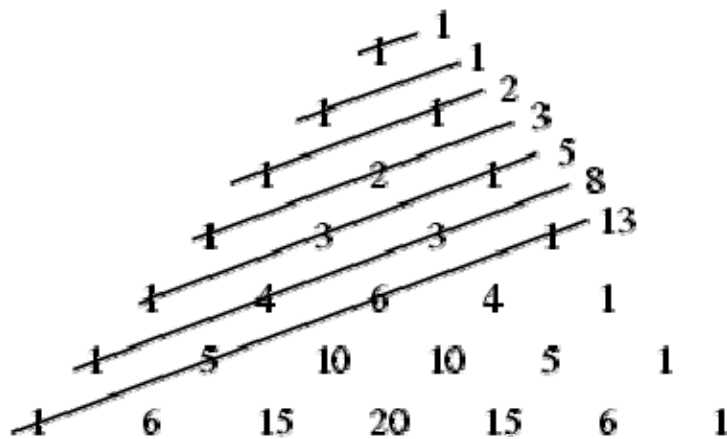
En intressant egenskap för Fibonaccital är att om man summerar ett udda antal produkter av på varandra följande Fibonaccital så är summan lika med kvadraten på det sista Fibonaccitalet. Exempelvis  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 13 + 13 \cdot 21 = 441 = 21^2$ . Denna egenskap kan representeras i en figur – se figur 3 – bestående av rektanglar arrangerade på varandra så att de bildar en kvadrat (en "Fibonaccikvadrat"). I figuren ser man även att rektanglarna bildar ett mönster som vrider sig utåt då  $n$  ökar. Jämför med den gyllene rektangeln i 4.3.2 (figur 11 och 12A).





**Figur 4.** En ”Fibonaccikvadrat” innehållande sju rektanglar uppbyggda av på varandra följande Fibonacciital. Siffrorna i rektanglarna står för rektanglarnas sidlängder. I de tre minsta rektanglarna är sidlängderna (från minst till störst): 1 x 1, 1 x 2 och 2 x 3.

Fibonacci-talföljd kan även hittas i Pascals triangel. Som kan ses i figur 5 summerar diagonalerna i Pascals triangel till på varandra följande Fibonacciital.



**Figur 5.** Pascals triangel

### 3.3 Binets formel för Fibonacci-talföljd

Om man vill bestämma ett specifikt Fibonacciital,  $f_n$ , kan det bli ganska arbetsamt (!) att använda ekvation (1). Man kan istället använda Binets formel, ekvation (4). Denna formel återupptäcktes på mitten av 1800-talet av den franska matematikern Jacques Binet (formeln var känd redan på 1700-talet av vissa matematiker, t ex Euler).

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (4)$$

För att demonstrera hur man från Fibonaccis talföljd kan få Binets formel tillämpar vi här sats 1 på Fibonaccis talföljd samt använder oss av initialvillkoren (3). Binets formel kan även bevisas med induktionsbevis – se appendix 1.

**Sats 1:** Låt

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} \quad (5)$$

$n \geq 2$ , vara en *andra ordningens linjär homogen rekursionsformel med de konstanta koefficienterna  $b_1$  och  $b_2$* . Låt  $a_0 = C_0$  och  $a_1 = C_1$ . Om  $r_1$  och  $r_2$ , där  $r_1 \neq r_2$ , är rötter till andragradsekvationen

$$t^2 - b_1 t - b_2 = 0 \quad (6)$$

så existerar konstanter  $c_1$  och  $c_2$  så att

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (7)$$

**Bevis:** Vi vill visa att om  $r_1$  och  $r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ) är rötter till (6) så gäller (7). Vi gör detta i tre steg genom att:

1. visa att om  $r$  är en rot till (6) så är  $r^n$  en lösning till (5)
2. visa att om  $u_n$  och  $v_n$  är lösningar till (5) så är även  $w_n = c_1 u_n + c_2 v_n$  en lösning till (5), där  $c_1$  och  $c_2$  är konstanter
3. sätta  $u_n = r_1^n$  och  $v_n = r_2^n$  där  $r_1$  och  $r_2$  är rötter till (6), då följer av 1. och 2. att  $w_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  är en lösning till (5).

1. Vi visar att  $r^n$  är lösning till (5) genom att visa att  $r^n = b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2}$ .

$b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} = r^{n-2} (b_1 r + b_2) = r^{n-2} r^2 = r^n$ . Andra likheten gäller ty eftersom  $r$  är en rot till (6) så gäller  $r^2 - b_1 r - b_2 = 0 \Leftrightarrow b_1 r + b_2 = r^2$ . Vi har nu visat att om  $r$  är en rot till (6) så är  $r^n$  en lösning till (5).

2. Vi visar att  $w_n = c_1 u_n + c_2 v_n$  är lösning till (5) genom att visa att  $w_n = b_1 w_{n-1} + b_2 w_{n-2}$ .

Eftersom  $u_n$  och  $v_n$  är lösningar till (5) så är  $u_n = b_1 u_{n-1} + b_2 u_{n-2}$  och  $v_n = b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}$ .

Då är  $w_n = c_1 (b_1 u_{n-1} + b_2 u_{n-2}) + c_2 (b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2}) = b_1 (c_1 u_{n-1} + c_2 v_{n-1}) + b_2 (c_1 u_{n-2} + c_2 v_{n-2}) = b_1 w_{n-1} + b_2 w_{n-2}$ . Sista likheten gäller ty  $w_{n-1} = c_1 u_{n-1} + c_2 v_{n-1}$  och

$w_{n-2} = c_1 u_{n-2} + c_2 v_{n-2}$ . Vi har nu visat att om  $u_n$  och  $v_n$  är lösningar till (5) så är även

$w_n = c_1 u_n + c_2 v_n$  en lösning till (5).

3. Om  $r_1$  och  $r_2$  är rötter till (6) samt om  $u_n = r_1^n$  och  $v_n = r_2^n$  så följer av 1. och 2. att  $w_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  är en lösning till (5), där  $c_1$  och  $c_2$  är konstanter.

$$\therefore a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$  ger alla lösningar. Detta kan bevisas genom att man antar att det finns en annan lösning  $b_n$  och bildar  $u_n = a_n - b_n$ . Då är  $u_n$  en rekursionsformel med initialvillkoren  $u_1 = u_2 = 0$ , därav följer att  $u_n = 0$  d v s  $a_n = b_n$  för alla  $n \geq 2$ .

VSB

Vi skall nu tillämpa sats 1 på Fibonaccis talföljd. Eftersom Fibonaccis talföljd är en *andra ordningens linjär homogen rekursionsformel med de konstanta koefficienterna  $b_1 = b_2 = 1$* , kan den skrivas på formen

$$f_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n, \quad (8)$$

där  $\alpha$  och  $\beta$  är rötter till andragradsekvationen

$$t^2 - t - 1 = 0. \quad (9)$$

För den generella andragradsekvationen  $Ay^2 + By + C = 0$  kan  $y$  beräknas med formeln

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

För ekvation (9) gäller alltså att  $t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , som ger  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  och  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

samt  $\alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5} - (1 - \sqrt{5})}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ .

För att bestämma konstanterna  $c_1$  och  $c_2$  sätter vi in initialvillkoren (3), d v s  $f_0 = 0$  och  $f_1 = 1$ , i ekvation (8). Detta ger att

$$f_0 = c_1 \alpha^0 + c_2 \beta^0 = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -c_1 \quad (\text{i}) \quad \text{och att}$$

$$f_1 = c_1 \alpha^1 + c_2 \beta^1 = 1 \quad (\text{ii}).$$

Om vi nu sätter in (i) i (ii) så får vi att  $c_1 \alpha - c_1 \beta = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Sista likheten gäller enligt ovan.

Eftersom  $c_2 = -c_1$  så är  $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ .

$$\text{Alltså är } \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Enligt ekvation (8) är nu  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ , där  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  och  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

Alltså är  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ , d v s Binets formel.

Vi använde här sats 1 samt initialvillkoren (3) på Fibonaccis talföljd för att demonstrera hur Binets formel kan ernås. Detta sätt att bevisa Binets formel är instruktivt eftersom man bl a ser var  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ ,  $\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$  och  $\sqrt{5}$  kommer ifrån. Sats 1, dess bevis samt dess tillämpning på Fibonaccis talföljd är hämtat från Johnsonbaugh (1997).

## 4. Gyllene snittet

### 4.1 Definition och egenskaper

Gyllene snittet uttrycker en relation mellan två olika kvantiteter, där summan av kvantiteterna förhåller sig till den större kvantiteten så som den större kvantiteten förhåller sig till den mindre kvantiteten. Om man låter den större kvantiteten betecknas av  $x$  och den mindre kvantiteten med  $y$ , där  $y > 0$ , så är  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi$ .

Alltså gäller att  $\frac{x+y}{x} = \phi$  (i)

$$\text{och att } \frac{x}{y} = \phi \Leftrightarrow x = y \cdot \phi \text{ (ii).}$$

Om man sätter in (ii) i (i) så fås

$$\frac{y \cdot \phi + y}{y \cdot \phi} = \phi \Leftrightarrow \frac{\phi + 1}{\phi} = \phi \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Denna andragsradsekvation är densamma som ekvation (9),  $t^2 - t - 1 = 0$ , som har den

positiva roten  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Gyllene snittet,  $\phi$ , definieras således som det irrationella talet

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 \quad (10)$$

Eftersom Binets formel för Fibonaccis talföljd,  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ , innehåller

$\phi$  och eftersom  $1-\phi = \frac{2-(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  så kan Binets formel skrivas som

$$f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}. \quad (11)$$

Detta ger ett samband mellan gyllene snittet och Fibonaccis talföljd!

Ett annat intressant samband mellan gyllene snittet och Fibonaccis talföljd behandlas i 4.2.

Gyllene snittet,  $\phi$ , anses vara det mest irrationella talet. Det har att göra med att  $\phi$  kan uttryckas med kedjebräk.

Låt  $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$  vara ett kedjebräk. Nu är även nämnaren i högerledet lika med  $x$ , ty

även den fortsätter i det oändliga. Alltså är  $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ . Denna andragradsekvation är samma andragradsekvation som ekvation (9) vilken har den positiva roten  $\phi$ . Alltså är  $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ .

Detta kedjebräk konvergerar väldigt sakta, vilket medför att det är ”svårare” att uttrycka  $\phi$  som ett bråk än andra irrationella tal. Alltså säger man att  $\phi$  är det mest irrationella talet.

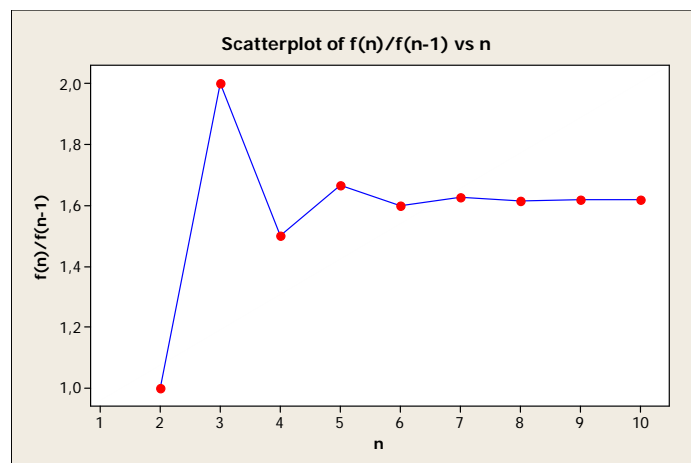
På samma sätt som med kedjebräket kan man visa att  $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ .

En annan intressant egenskap för gyllene snittet är att  $\phi^n + (-1)^n \phi^{-n} = 2n - (-1)^n$  (Dunlap (1997)). Denna relation är anmärkningsvärd och intressant eftersom den visar att summan av potenser av ett irrationellt tal kan vara lika med ett rationellt tal!

## 4.2 Relation mellan gyllene snittet och Fibonaccis talföljd

Låt  $f_n$  vara definierad som i ekvation (1), d v s  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ . Kvoten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ , som en funktion

av  $n$ , pendlar (oscillerar) kring värdet för  $\phi \approx 1,618$  och närmar sig asymptotiskt detta värde då  $n$  ökar – se figur 6.



**Figur 6.** Spridningsdiagram för kvoten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$  som en funktion av n.

Att kvoten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$  närmar sig gyllene snittet då n ökar insågs (för första gången) av den tyske astronomen Johannes Kepler (1571-1630), ca 1611. Det tog dock mer än hundra år innan relationen för första gången bevisades (1753) – av den skotske matematikern Robert Simson (1687-1768).

Man kan inse att relationen gäller genom att undersöka ”gyllene snittets kedjebråk”. Kom ihåg att  $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ . Om man beräknar  $\phi$  genom en serie av gradvisa approximationer

där man avbryter kedjebråket ”längre och längre bort” så får man:

$$1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} \approx 1.66$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5} = 1.6 \quad \text{o s v.}$$

Som synes är kedjebrottet lika med kvoten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ , och då man fortsätter approximationerna i det oändliga går de mot  $\phi$  (se Livio (2002) och Dunlap (1997)).

Relationen kan uttryckas m h a gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi, \quad (12)$$

vilket kan bevisas m h a Binets formel för Fibonaccis talföljd.

**Bevis av (12):** Enligt tidigare diskussion (se ekvation (11) samt föregående förklaring) kan

Binets formel skrivas som  $f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$ .

Då är  $\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}} \bigg/ \frac{\phi^{n-1} - (1-\phi)^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\phi^{n-1} - (1-\phi)^{n-1}}$  (i),

$$(1-\phi)^n = \frac{\phi^{n-1}}{\phi^{n-1}} (1-\phi)^{n-1} (1-\phi) = \phi^{n-1} (1-\phi) \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1} \quad \text{(ii) och}$$

$$(1-\phi)^{n-1} = \frac{\phi^{n-1}}{\phi^{n-1}} (1-\phi)^{n-1} = \phi^{n-1} \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1} \quad \text{(iii)}$$

Om vi sätter in (ii) och (iii) i (i) så får vi

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\phi^n - \phi^{n-1} (1-\phi) \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}{\phi^{n-1} - \phi^{n-1} \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}} = \frac{\phi - (1-\phi) \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}.$$

Vi skall nu undersöka gränsvärdet,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi - (1-\phi) \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}$ .

Vi vill visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1} = 0$ , ty då gäller (12).

För att visa detta måste vi visa att  $\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right) = \left(\frac{1}{\phi} - 1\right) < 1$ , vilket

är ekvivalent med att visa att  $\frac{1}{\phi} < 2$ .

Eftersom  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  och  $\frac{\sqrt{5}}{2} > 0$  så är  $\phi > \frac{1}{2}$  och då är  $\frac{1}{\phi} < 2$ .

Alltså är  $\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right) < 1$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1} = 0$ .

$$\text{Alltså gäller att } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi - (1-\phi)\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^{n-1}} = \frac{\phi - (1-\phi) \cdot 0}{1 - 0} = \phi$$

VSB

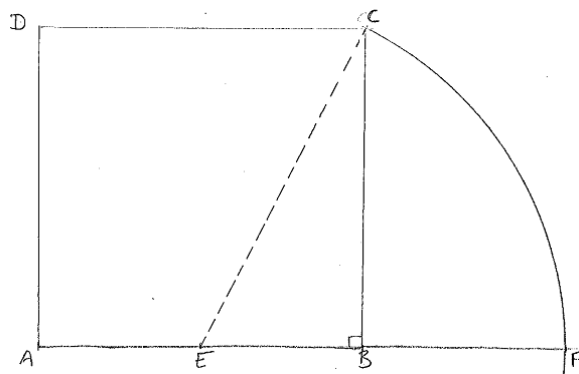
### 4.3 Gyllene snittet och geometri

Gyllene snittet uppträder ofta i geometriska figurer – speciellt i figurer med femfaldig symmetri, t ex den regelbundna femhörningen (pentagonen). Att en geometrisk figur har femfaldig symmetri betyder att när man roterar figuren ett femtedels varv ( $360^\circ/5 = 72^\circ$ ) ser den likadan ut som före rotationen.

#### 4.3.1 Endimensionell figur

Givet en sträcka kan man med hjälp av en passer och linjal konstruera en annan sträcka som är relaterad till den givna sträckan genom gyllene snittet (de båda sträckorna tillsammans kommer härnäst betecknas med den ”gyllene sträckan”). En sådan konstruktion visas i figur 7. Givet sträcka AB ritas en kvadrat ABCD. Mittpunkten, E, på sträckan AB bestäms (se *Elementa* bok I sats 10 för en beskrivning av hur man kan bestämma E). Med hjälp av en passer dras en båge från C med centrum i E (dvs sträckan EC är radien för en tänkt cirkel). Sträckan AB utökas och bågen skär denna linje i punkten F. Nu är  $\phi = \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF}$ , vilket bevisas nedan.





**Figur 7.** Konstruktion av den ”gyllene sträckan” AF.

Låt sträckorna  $AB = BC = AD = DC = x$  och eftersom punkten E delar sträckan AB i hälften så är sträckan  $AE = EB = \frac{x}{2}$ . Sträckan EC är radien i en tänkt cirkel så vi låter  $EC = r$ , men nu är även sträckan EF radi till den tänkta cirkeln alltså är  $EF = r$ . Enligt figur 7 är sträckan  $AF = AE + EF$  och sträckan  $BF = EF - EB$ .

Nu är alltså  $AF = \frac{x}{2} + r = \frac{x + 2r}{2}$  och  $BF = r - \frac{x}{2} = \frac{2r - x}{2}$ . Med dessa beteckningar är

$$\phi = \frac{AF}{AB} = \frac{\frac{x + 2r}{2}}{x} = \frac{x + 2r}{2x} \text{ och } \phi = \frac{AB}{BF} = \frac{x}{\frac{2r - x}{2}} = \frac{2x}{2r - x}. \text{ Vi vill nu visa att detta gäller.}$$

**Bevis:** Vi vill visa att  $\phi = \frac{x + 2r}{2x}$  och  $\phi = \frac{2x}{2r - x}$ .

För att visa detta måste vi först bestämma r. Eftersom triangeln BCE är rätvinklig gäller Pythagoras sats. Alltså är  $r^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5x^2}{4}$ ,  $r = \frac{\sqrt{5} \cdot x}{2}$  och  $2r = \sqrt{5} \cdot x$  ( $r > 0$ , ty r är en sträcka).

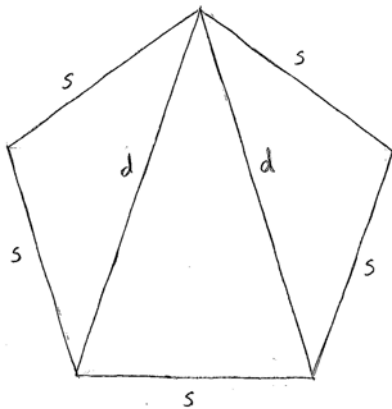
$$\text{Alltså är } \frac{x + 2r}{2x} = \frac{x \cdot (1 + \sqrt{5})}{2x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\text{och } \frac{2x}{2r - x} = \frac{2x}{x \cdot (\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

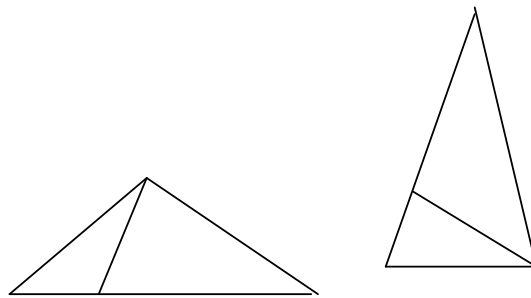
VSB

### 4.3.2 Tvådimensionella figurer

En tvådimensionell figur som är nära relaterad till gyllene snittet är den regelbundna femhörningen, vilken kan konstrueras utifrån den ”gyllene sträckan” – se appendix 2. I den regelbundna femhörningen är  $\phi = \frac{d}{s}$  där  $d$  är diagonallängd och  $s$  sidlängd, se figur 8. Att  $\phi = \frac{d}{s}$  har att göra med konstruktionen av den regelbundna femhörningen (se appendix 2, notering I).



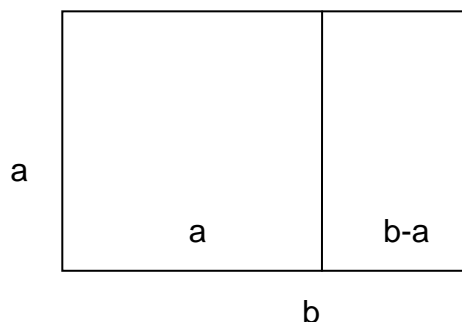
**Figur 8.** En regelbunden femhörning med sidlängd  $s$  och diagonallängd  $d$ .



**Figur 9.** Inflation av den gyllene gnomonen och av den gyllene triangeln.

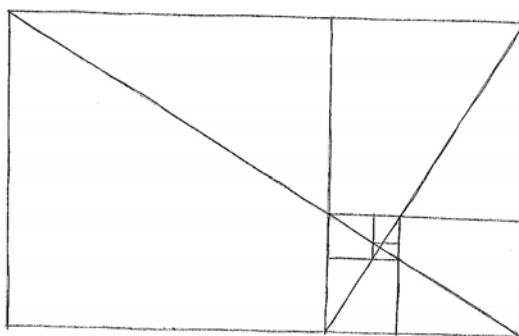
Figur 8 visar hur den regelbundna femhörningen kan delas upp i tre trianglar där två av trianglarna är trubbvinkliga och en är spetsvinklig. Dessa trianglar kallas ofta för de gyllene gnomonerna (de två trubbvinkliga) och den gyllene triangeln (den spetsvinkliga). Den gyllene gnomonen och den gyllene triangeln har båda en unik egenskap – de kan delas upp i två mindre trianglar som i sin tur är en gyllene gnomon och en gyllene triangel, se figur 9. Denna process, som kallas en inflation (ty processen ökar antalet trianglar), kan fortsätta i det oändliga. Omvänt kan en gyllene gnomon och en gyllene triangel kombineras ihop så att en ny gyllene gnomon/triangel skapas, d v s en deflation (antalet i trianglar minskar).

En annan tvådimensionell figur som är nära relaterad till gyllene snittet är den ”gyllene rektangeln”. Den gyllene rektangeln är konstruerad så att  $\phi = \frac{b}{a}$ , där  $a$  är den kortare och  $b$  den längre sidlängden. Den gyllene rektangeln kan delas upp i en kvadrat och en rektangel, d v s en inflation, se figur 10. Den nya mindre rektangeln är även den en gyllene rektangel, d v s  $\phi = \frac{a}{b-a}$ .



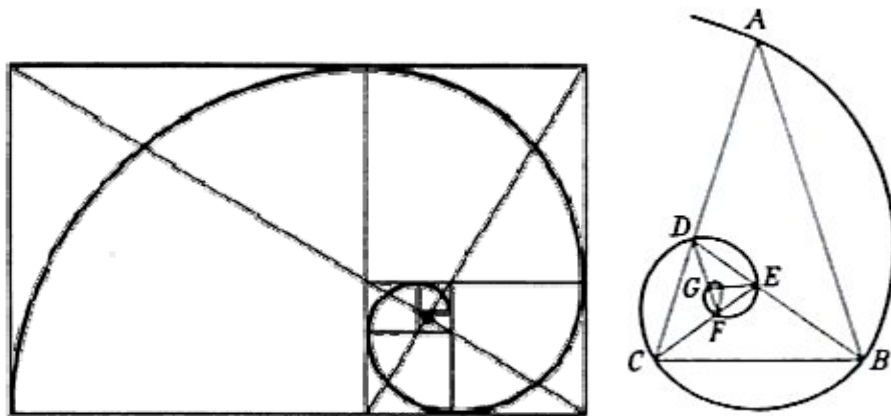
**Figur 10.** Den gyllene rektangeln, med sidlängderna a och b, uppdelad i en kvadrat och en ny gyllene rektangel.

Analogt med uppdelningen av den gyllene gnomonen/triangeln kan inflationen av den gyllene rektangeln repeteras i det oändliga. Några sådana uppdelningar visas i figur 11. Figur 11 visar även en annan intressant egenskap för den gyllene rektangeln. Diagonalen till den första största rektangeln är rätvinklig med diagonalen för den andra mindre rektangeln. Vidare är diagonalen till den första rektangeln också diagonal till den tredje, femte och sjunde rektangeln samt diagonalen till den andra rektangeln är även diagonal till den fjärde och sjätte rektangeln. Detta betyder att uppdelningen av den gyllene rektangeln konvergerar i den punkt som ges av de båda diagonalernas skärningspunkt, se figur 11.



**Figur 11.** Uppdelning (inflation) av den gyllene rektangeln.

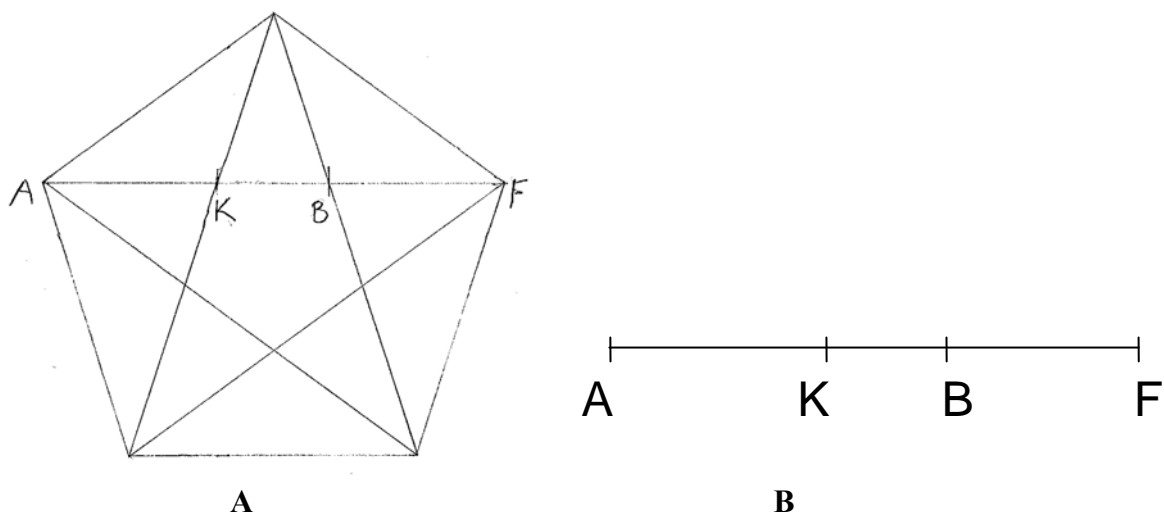
Om man, i figur 11, m h a kurvor förbinder rektanglarnas hörn med varandra får man en spiral, se figur 12A. Denna spiral konvergerar i de båda diagonalernas skärningspunkt. Spiralen, som kallas logaritmisk spiral, kan även fås från uppdelningen av den gyllene triangeln – se figur 12B. På polär form ges den logaritmiska spiralen av  $r = r_0 e^{\theta \cot \alpha}$ , där  $r_0$  och  $\alpha$  är konstanter. Radien för spiralen,  $r$ , mätt från polen (d v s skärningspunkten för de två diagonalerna) är alltså en funktion av vinkeln  $\theta$ . Konstanten  $r_0$  står för den totala dimensionen av spiralen och  $\alpha$  är ett mått på hur tätt spiralen är snurrad. Den logaritmiska spiralen har en unik egenskap – spiralens form ändras inte då den snurras tätare och tätare.



**Figur 12.** Den logaritmiska spiralen uppritad m h a inflation av den gyllene rektangeln (A) samt m h a inflation av den gyllene triangeln (B).

Ytterligare en figur som har en uppenbar koppling till gyllene snittet är den femuddiga stjärnan (pentagrammet). Figur 13A visar hur stjärnan kan konstrueras utifrån de fem diagonalerna i en regelbunden femhörning. Figur 13B visar på en annan koppling mellan gyllene snittet och den femuddiga stjärnan. Sträckan AF är en av diagonalerna i den regelbundna femhörningen. Två av de övriga diagonalerna i femhörningen skär sträckan AF i punkterna K respektive B, se figur 13A. Således delas sträckan AF upp i tre sträckor: AK, KB och BF. Nu är AK och BF lika långa, KB är kortare än AK och  $\phi = \frac{AK}{KB}$ . Ett bevis för detta finns i appendix 2 (se notering II).

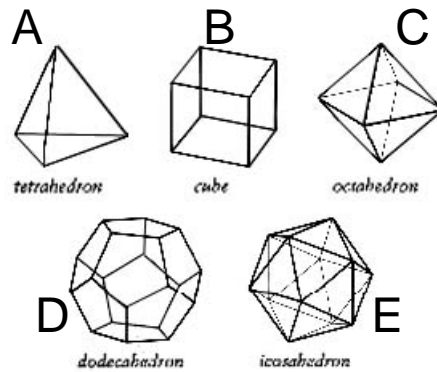
Om man tittar noga på figur 13A ser man en intressant egenskap för den femuddiga stjärnan. Dess mitt utgör en regelbunden femhörning (som i förhållande till den ursprungliga femhörning är upp och ned), i vilken man kan inskriva en ny femuddig stjärna. Alltså kan även den femuddiga stjärnan delas upp i en oändlig inflation.



**Figur 13.** Den femuddiga stjärnan uppritad utifrån diagonalerna i den regelbundna femhörningen (A). En av diagonalerna, sträckan AF, delas upp i tre sträckor av punkterna K respektive B (A & B).

### 4.3.3 Tredimensionella figurer

De fem platonska kropparna, figur 14, är de enda tredimensionella figurerna som är regelbundna polyedrar, d v s alla sidoytor är kongruenta regelbundna polygoner och i alla hörn möts lika många sidoytor och lika många kanter. Två av dessa uppvisar femfaldig symmetri, dodekahedron (figur 14D) och ikosahedron (figur 14E), och kan således kopplas till gyllene snittet. Tabell 1 visar hur dessa figurers ytareor och volymer står i relation till gyllene snittet,  $\phi$ .

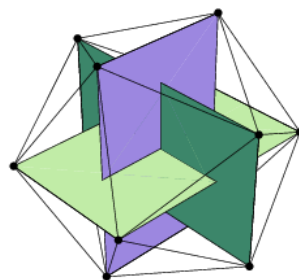


**Figur 14.** De fem platonska kropparna: tetrahedron (A), kuben (B), oktahedron (C), dodekahedron (D) och ikosahedron (E).

**Tabell 1.** Ytareor och volymer för ikosahedron och dodekahedron. \* betyder att ytarean inte är relaterad till gyllene snittet,  $\phi$ .

kropp	ytarea	volym
Ikosahedron	*	$\frac{5\phi^5}{6}$
Dodekahedron	$\frac{15\phi}{\sqrt{3-\phi}}$	$\frac{5\phi^3}{2(3-\phi)}$

Figur 15 visar på en annan koppling mellan gyllene snittet och en ikosahedron. Om man arrangerar tre gyllene rektanglar så att deras centrum sammanfaller samt så att de är rätvinkliga mot varandra så utgör rektanglarnas hörn hörnen i en ikosahedron.

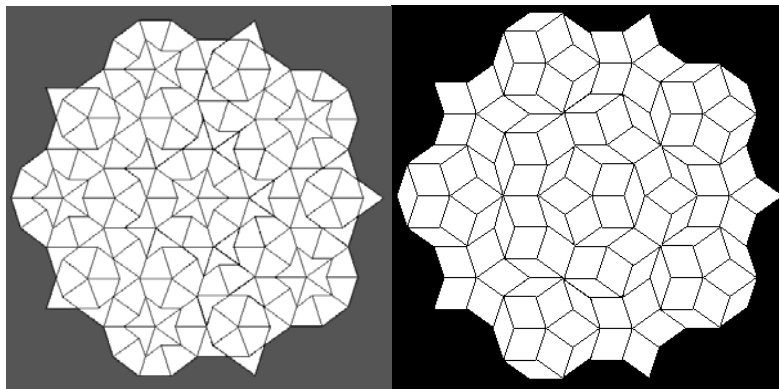


**Figur 15.** Tre gyllene rektanglar inskrivna i en ikosahedron.

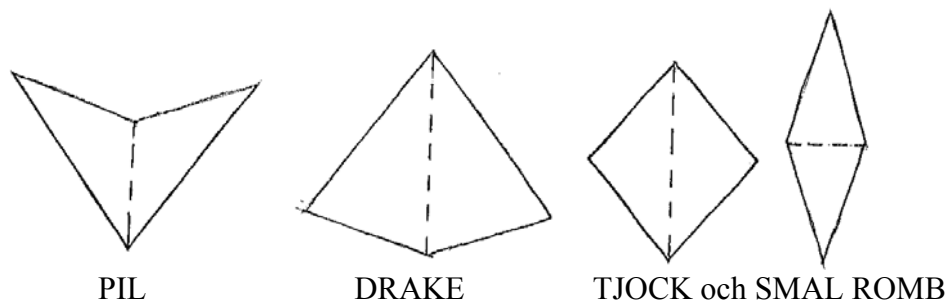
#### 4.3.4 Penroseplattor

Ordet platta används här för att beskriva en struktur, bestående av en/flera typer av plattor, som arrangeras för att fylla en yta. Vanligtvis talar man om plattor i två dimensioner men man kan även utöka begreppet till högre dimensioner. En periodisk platta fyller hela planet och har ett mönster som återkommer, t ex ett rutsystem bestående av kvadrater. Endast figurer som uppvisar fyrfaldig, trefaldig och sexfaldig symmetri kan användas för att bygga upp en periodisk platta. År 1974 visade dock Oxfordprofessorn Roger Penrose att det går att konstruera plattor med femfaldig symmetri. Dessa är dock inte strikt periodiska men uppvisar ”en ordning med lång spännvidd” (på engelska ”long-range order”) och kallas följaktligen för Penroseplattor.

**A**



**B**



**Figur 16.** Två olika Penroseplattor (A) som består av pilar och drakar respektive tjocka och smala romber (B).

Figur 16A visar två olika Penroseplattor som båda består av två olika figurer. Penroseplattan till vänster består av pilar (= darts) plus drakar (= kites) och den till höger består av tjocka plus smala romber. Pilen samt den tjocka romben är uppbyggda av gyllene gnomoner och draken samt den smala romben är uppbyggda av gyllene trianglar – se figur 16B. En annan egenskap som de båda Penroseplattorna delar är att då plattans storlek går mot oändligheten så är antalet drakar/tjocka romber lika med antalet pilar/smala romber gånger gyllene snittet. Alltså om man låter  $P$  stå för Penroseplattans storlek,  $N_d$  stå för antalet drakar,  $N_p$  för antalet

pilar,  $N_t$  för antalet tjocka romber och  $N_s$  för antalet smala romber så är gränsvärdena

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{N_d}{N_p} = \phi \quad \text{och} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{N_t}{N_s} = \phi.$$

Penroseplattor har även (övertäckande nog) tillämpningar i naturen. Man har hittat kristaller, så kallade quasi-kristaller, som uppvisar hög ordning (som periodiska kristaller) men som samtidigt uppvisar femfaldig (ikosahedral) symmetri – precis som Penroseplattorna. För en mer utförlig beskrivning av quasi-kristallerna se till exempel Livio (2002) och Dunlap (1997).

## 4.4 Gyllene snittet i naturen och konsten

### 4.4.1 Gyllene snittet i naturen

Gyllene snittet kan hittas överallt i naturen, till exempel i form av den gyllene vinkeln. Om man delar ett helt varv med gyllene snittet fås vinkeln  $\frac{360^\circ}{\phi} \approx 222.5^\circ$ , räknat moturs. Om man istället

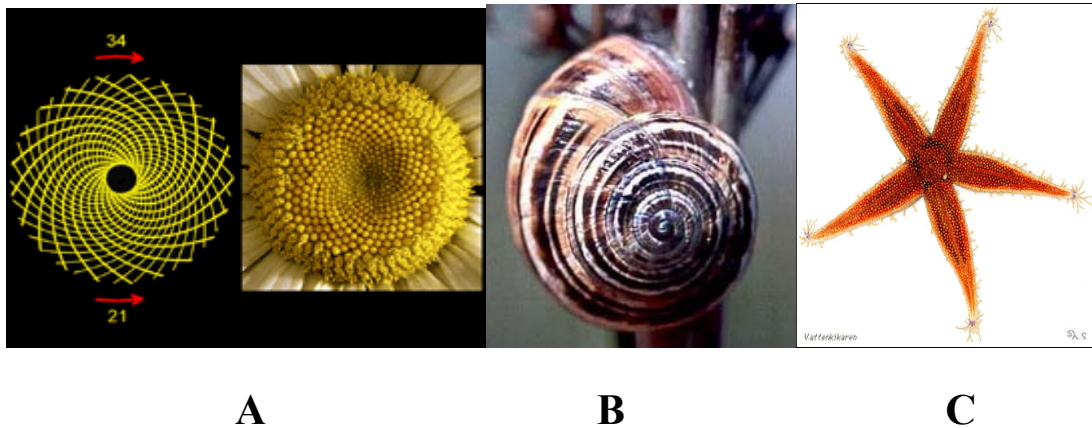
räknar medurs får man vinkeln  $360^\circ - \frac{360^\circ}{\phi} \approx 137.5^\circ$ . Denna vinkel kallas den gyllene vinkeln.

Man har kommit fram till att vinkeln mellan successiva löv är ungefär densamma och att denna vinkel ligger nära den gyllene vinkeln. En förklaring till detta fenomen är att det är fördelaktigt för växten att arrangera sina löv på ett sådant sätt så att löven får så mycket sol och regn som möjligt. Detta är möjligt om de övre löven så lite som möjligt täcker de nedre löven. Eftersom gyllene snittet är det mest irrationella talet (se 4.1) så är den gyllene vinkeln bättre än andra irrationella multipler av  $360^\circ$ .

Gyllene snittet i form av den logaritmiska spiralen är en vanlig förekomst i naturen. Ett exempel på hur den logaritmiska spiralen används i naturen återfinns hos pärlbåtar (en bläckfiskart, *Nautilus pompilius*), se figur 17. Då djuret växer bildar den (i sitt skal) större och större kamrar i form av en logaritmisk spiral. Andra exempel från naturen som uppvisar logaritmiska spiralformer är: solrosor (figur 18A), snäckskal (figur 18B), strömvirvlar, orkaner och spiralgalaxer. Även den femuddiga stjärnan återfinns ofta i naturen, till exempel hos sjöstjärnor (figur 18C), blommor och hos kärnhuset i äpplen.



**Figur 17.** Gyllene snittet i naturen i form av den logaritmiska spiralen: pärlbåt



**Figur 18.** Gyllene snittet i naturen i form av den logaritmiska spiralen: solros (A), snäckskal (B), respektive i form av den femuddiga stjärnan: sjöstjärna (C).

#### 4.4.2 Gyllene snittet i konsten och arkitekturen

Gyllene snittet studeras inom många andra områden än matematik och biologi, t ex konst, arkitektur och musik (anses vara estetiskt behagligt).

En arkitektonisk byggnad som ofta påstås ha ett samband med gyllene snittet är Parthenon (på Akropolis, Aten), som byggdes på 400-talet f kr. Parthenon har tyvärr delvis förstörts. Man hävdar dock att Parthenon, som den såg ut när den byggdes, kan inskrivas i en gyllene rektangel, se figur 19. Detta påstående är dock svårt att verifiera, då byggnaden delvis förstörts och dess dimensioner varierar från källa till källa.



**Figur 19.** Parthenon inskriven i en gyllene rektangel.

*Divina Proportione* (1509) markerar början på ett nyvunnet intresse för gyllene snittet. Före *Divina Proportione* var gyllene snittet endast känt inom den matematiska sfären, men i och med publiceringen av verket kom gyllene snittet att beaktas inom andra områden – som t ex konsten. Pacioli sökte med *Divina Proportione* sammanbinda konsten med matematiken och geometrin. I början av verket deklarerar Pacioli att han, via gyllene snittet, vill uppenbara ”hemligheten” med harmoniska former för konstnärer.



Många konstnärliga verk har påståtts inkludera gyllene snittet, i de flesta fall i form av den gyllene rektangeln. I många av dessa fall kan dessa påståenden inte verifieras. Exempelvis har man påstått att Leonardo Da Vinci (1452-1519) använde sig av gyllene snittet i sina målningar, t ex i Mona Lisa. Detta påstående grundar sig bl a på att Leonardo var mycket intresserad av proportioner och att det var han som illustrerade *Divina Proportione*. Eftersom Leonardo Da Vinci sällan avslöjade vad hans målningar baserats på kan man aldrig vara säker på om han använde sig av gyllene snittet. Livio (2002) går igenom fem av Leonardo Da Vinci målningar som man påstått skall innehålla gyllene snittet och kommer fram till att målningarna troligtvis inte innehåller gyllene snittet.

Mot slutet av 1800-talet skedde ett uppsving för gyllene snittet i akademisk litteratur och även konstnärer uppmärksammade då gyllene snittet. En konstnär som på senare tid använt sig av gyllene snittet i sina målningar är Salvador Dali (1904-1989). Målningen "Sacrament of the last supper" (1955), figur 20A, är gjord på en kanvas vars dimensioner beskriver en gyllene rektangel och målningen innehåller en stor dodekahedron (figur 20B).



A

B

**Figur 20.** A. Salvador Dalis "Sacrament of the last supper" (1955)  
B. En dodekahedron.

En av de starkaste förespråkarna för användandet av gyllene snittet inom konsten och arkitekturen var Le Corbusier (1887-1965). Han skapade ett proportionssystem som han kallade "Modular". Detta proportionssystem baserades på sambandet mellan människans proportioner och gyllene snittet. Exempelvis så inskrev han en mansfigur i en rektangel, där kvoten mellan mannens höjd och höjden till naveln var gyllene snittet. Le Corbusier föreslog att "Modular" skulle ge harmoniska proportioner till allt, från t ex dörrhandtag till byggnader.

Man har även spekulerat i om människokroppen innehar proportioner som står i relation till varandra genom gyllene snittet. Det finns dock inga universella mänskliga proportioner – vi är alla olika. Man kan dock tala om en genomsnittsmänniska eller en idealmänniska och där finna proportioner som står i relation till gyllene snittet.

## 5. Avslutning

Mycket har skrivits om gyllene snittet och mycket mer kommer säkert även i framtiden att skrivas om detta fascinerande irrationella tal. I och med Dan Browns bok *The DaVinci Code* (2003) har intresset för gyllene snittet och Fibonaccis talföljd ökat, inte minst bland den breda allmänheten (man kan bara hoppas att de också börjar intressera sig för annan matematik!). Även inom matematiska kretsar har intresset för gyllene snittet och Fibonacci ökat. Det finns sedan 1953 en tidning, *Fibonacci Quartely*, som är dedikerad till Fibonacci. Enligt tidningens hemsida (<http://www.engineering.sdstate.edu/~fib/>) är det huvudsakliga ändamålet med tidningen ”to serve as a focal point for a widespread interest in the Fibonacci and related numbers”.

Det är tankeväckande att något som redan de gamla grekerna formulerade kan vara så populärt än idag och att en talföljd som tillkom på medeltiden kan intressera och inspirera så många i vår tid. Personligen har det varit intressant och lärorikt att fördjupa sig i ”gyllene snittet” och ”Fibonaccis talföljd”.

Avslutningsvis vill jag tacka min handledare Britt-Marie Stocke för hennes engagemang, goda råd och för de regelbundna träffarna som hjälp till att föra detta arbete framåt!

## 6. Referenslista

### 6.1 Litteratur

Dunlap R A (1997): The golden ratio and Fibonacci numbers. Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd

Johansson B G (2004): Matematikens historia. Lund: Studentlitteratur

Johnsonbaugh R (1997): Discrete mathematics, 4<sup>th</sup> edition. New Jersey: Prentice Hall

Kline M (1972): Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: vol 1. New York: Oxford University Press

Livio M (2002): The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadways Books

Mathworld: *Fibonacci number* (2006-10-09)  
<http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>

Mathworld: *Golden ratio* (2006-10-09) <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>

Matematiska institutionen Stockholms universitet: Euklidisk geometri (2007-01-09).  
<http://www.math.su.se/~torbjorn/Undervisn/Geometri.pdf>

Matematiska institutionen Stockholms universitet: Eulers polyederformel och de platonska kropparna (2007-01-09). <http://www.math.su.se/~torbjorn/Undervisn/Regpoly.pdf> .

Struik D J (1966): Matematikens historia. Stockholm: Prisma

The biographical dictionary of scientists: Mathematicians (1985). General editor: D Abbott. London: Blond educational

[The thirteen books of Euclid's Elements: vol 1-3, 2<sup>nd</sup> edition \(1956\). Translated by: T L Heath. New York: Dover Publications, Inc.](#)

Thompson J (1996): Matematiken i historien. Lund: Studentlitteratur

Wikipedia: *Fibonacci* (2006-10-09) <http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>

Wikipedia: *Fibonacci number* (2006-10-09) [http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number)

Wikipedia: *Golden ratio* (2006-10-09) [http://en.wikipedia.org/wiki/Golden\\_ratio](http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio)

## 6.2 Figurer

- Figur 1 <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Fibonacci.html>
- 5 <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>
- 12A [http://www.ludd.luth.se/~micke/scientium/sci\\_5-6\\_94/gyllene.htm](http://www.ludd.luth.se/~micke/scientium/sci_5-6_94/gyllene.htm)  
B <http://ourworld.compuserve.com/homepages/DP5/pattern1.htm>
- 14 [http://www.daviddarling.info/encyclopedia/P/Platonic\\_solid.html](http://www.daviddarling.info/encyclopedia/P/Platonic_solid.html)
- 15 <http://math.ucr.edu/home/baez/namboodiri/>
- 16A <http://www.uwgb.edu/DutchS/symmetry/penrose.htm>
- 17A,B <http://ourworld.compuserve.com/homepages/DP5/pattern1.htm>  
C <http://www.wiljo.nu/images/medelhavsida/snacka.htm>  
D <http://www.vattenkikaren.gu.se/Fakta/arter/echinode/asteroid/asterube/asteru.html>
- 18 <http://www.emsb.qc.ca/laurenhill/science/golden.html>
- 19A <http://www.usc.edu/schools/annenberg/asc/projects/comm544/library/images/768.html>  
B <http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html>

Övriga figurer är ritade av författaren.

## Appendix 1

### Binets formel

Fibonacci's talföljd,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  med initialvillkoren  $f_0 = 0$  och  $f_1 = 1$ , kan skrivas på

formen  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ , där  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  och  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Denna

form kallas Binets formel och bevisas här med induktionsbevis.

### Induktionsbevis

1. För  $n = 0$  är  $f_0 = 0$  (enligt initialvillkoren) och  $\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$ . Alltså för  $n = 0$  är

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

2. Antag att  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$  gäller för  $n = k$  och  $n = k-1$ , d v s  $f_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}$  och

$$f_{k-1} = \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Då är } f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha^k + \alpha^{k-1}) - (\beta^k + \beta^{k-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{5}}.$$

Första likheten fås från definitionen av Fibonacci's talföljd för  $n = k+1$ . Sista likheten gäller eftersom  $\alpha$  och  $\beta$  är rötter till andragradsekvationen  $t^2 - t - 1 = 0$  (ekvation (9)) vilket ger att

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^{k-1} \alpha^2 = \alpha^{k-1} (\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha^{k+1} = \alpha^k + \alpha^{k-1}$$

och på samma sätt fås  $\beta^{k+1} = \beta^k + \beta^{k-1}$

Alltså gäller att  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$  även för  $n = k+1$

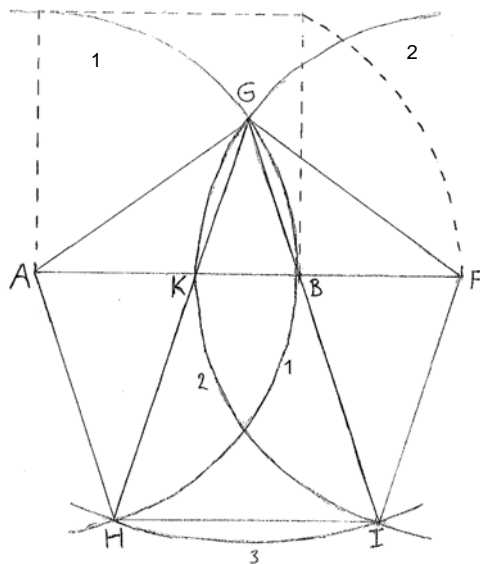
1 och 2 tillsammans med induktionsprincipen ger att  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$  för  $n \geq 0$ .

VS

## Appendix 2

Den regelbundna femhörningen kan konstrueras utifrån den ”gyllene sträckan”, se figur A.1. Konstruktionen av den ”gyllene sträckan” finns i 4.3.1 (figur 7).

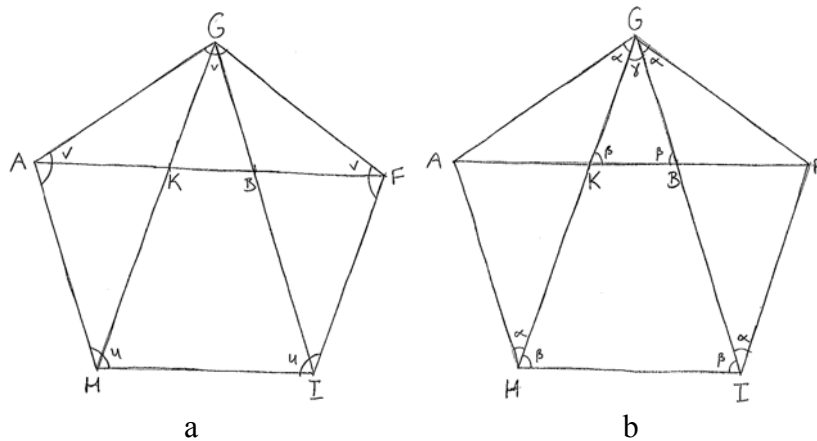
Givet den ”gyllene sträckan” AF och punkten B som skär AF så att  $\phi = \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF}$  kan den regelbundna femhörningen konstrueras med passare och linjal. Med passaren dras en cirkelbåge (båge 1 i figur A.1) med radien AB och centrum i A. Bågen skär alltså sträckan AF i punkten B (se figur A.1). Ännu en cirkelbåge (båge 2 i figur A.1) med radien AB men med centrum i B dras. Denna båge skär sträckan AF i en punkt, vilken här betecknas med K, se figur A.1. Låt punkten G vara den övre skärningspunkten för de två cirkelbågarna. Med en linjal dras sträckorna GK respektive GB. En cirkelbåge dras med radien AF och centrum i G (båge 3 i figur A.1). Sträckan GK respektive GB förlängs så att båge 3 skär linjerna i punkten H respektive I. Punkterna AGFIH utgör nu hörnen i den regelbundna femhörningen. se figur A.1.



**Figur A.1.** Konstruktion av den regelbundna femhörningen.

Vi skall nu bevisa att det vi konstruerat verkligen är en regelbunden femhörning, d v s att alla vinklar är lika stora och att alla sidor är lika långa. Enligt konstruktion är sträckorna GF och FI radie till båge 1, som har radien AB (se figur A.1). Alltså är  $GF = FI = AB$ . Sträckorna AG och AH är radie till båge 2, som även den har radie AB (se figur A.1). Alltså är  $AG = AH = GF = FI = AB$ . Sträckorna GH och GI är radie till båge 3, som har radie AF. Alltså är  $GH = GI = AF$ .

Först bevisar vi att alla vinklar är lika stora.



**Figur A.2.** Den konstruerade femhörningen.

Vinklarna  $HAG = AGF = GFI$ , vilka betecknas med  $v$  i figur A.2a, är lika eftersom triangelna  $HAG$ ,  $AGF$  och  $GFI$  är kongruenta (ty  $AG = AH = GF = FI$ , vilket även ger att triangelna är likbenta, och  $GH = GI$ ).

För att bevisa att alla vinklar i den konstruerade femhörningen är lika måste vi nu bevisa att vinklarna  $u = v$  (figur A.2a). De båda vinklarna  $u$  i figur A.2a är lika eftersom:

1. Vinklarna  $AHG = AGH = FIG = FGI$ , vilka betecknas med  $\alpha$  i figur A.2b, är lika eftersom triangelna  $HAG$  och  $GFI$  är kongruenta och likbenta.
2. Vinklarna  $IHG = HIG$ , vilka betecknas med  $\beta$  i figur A.2b, är lika eftersom triangel  $HGI$  är likbent (ty  $GH = GI$ ).

Alltså är  $u = \alpha + \beta$ , se figur A.2.

Låt vinkel  $HGI$  betecknas med  $\gamma$ . Då är  $v = 2\alpha + \gamma$ , se figur A.2.

**Bevis för att vinklarna  $u = v$ :** Enligt ovan är  $u = \alpha + \beta$  och  $v = 2\alpha + \gamma$ . Alltså är  $u = v \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \alpha + \gamma$ . Vi vill alltså bevisa att  $\beta = \alpha + \gamma$ .

Vinklarna  $IHG = HIG = BKG = KBG$ , vilka betecknas med  $\beta$  i figur A.2b, är lika eftersom triangelna  $GHI$  respektive  $GKB$  är likformiga enligt topptriangelnsatsen (ty sträckan  $KB$  är parallell med sträckan  $HI$  enligt konstruktion).

Triangeln  $BAG$  är likbent (ty  $AG = AB$  enligt konstruktion) vilket ger att vinklarna  $ABG = AGB$ , dvs  $\beta = \alpha + \gamma$  (se figur A.2b).

Vi har nu bevisat att alla vinklar är lika stora. Då återstår att bevisa att alla sidor är lika långa, dvs att  $AG = AH = GF = FI = HI$ . Som nämnt är  $AG = AH = GF = FI = AB$ , alltså återstår det att bevisa att sträckan  $HI = AB$ .

**Bevis för att sträcka HI = AB :** Beviset sker i fyra steg.

*Steg 1.* Enligt konstruktion är sträckan  $KF = AB$ , ty  $KF$  är radie till båge 2 (som har radie  $AB$ ). Nu är  $KF = AB \Leftrightarrow KB + BF = AK + KB \Leftrightarrow BF = AK$ .

Första ekvivalenspilen fås från relationerna  $KF = KB + BF$  och  $AB = AK + KB$ , vilka kan ses i figur A.1.

*Steg 2.* Enligt konstruktionen av den ”gyllene sträckan”  $AF$  (se 4.3.1) är

a)  $\phi = \frac{AF}{AB}$  och

b)  $\phi = \frac{AB}{BF}$ . Nu är  $\phi = \frac{AB}{BF} = \frac{AK + KB}{AK} = 1 + \frac{KB}{AK} \Leftrightarrow \phi - 1 = \frac{KB}{AK}$ .

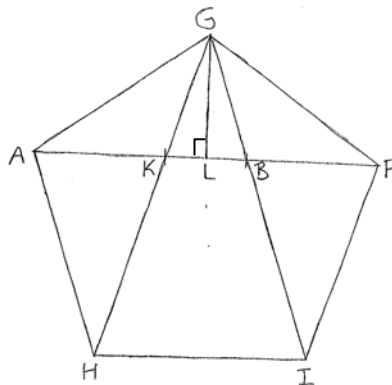
Andra likheten fås från figur A.1 ( $AB = AK + KB$ ) och från steg 1 ( $BF = AK$ ). Nu är

$$\phi - 1 = \frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{-(1 - \sqrt{5})}{2} = \frac{-(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{-(1 - 5)}{2(1 + \sqrt{5})} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\phi}.$$

Alltså är  $\frac{1}{\phi} = \frac{KB}{AK} \Leftrightarrow \phi = \frac{AK}{KB}$ .

*Steg 3.* I detta steg vill vi visa att  $GK = AK$ .

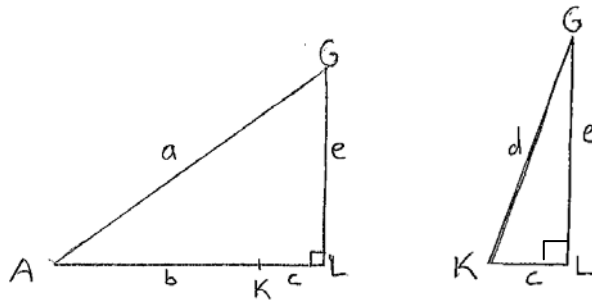
För att göra detta drar vi sträckan  $GL$ , se figur A.3, som delar sträckan  $KB$  mitt itu.



**Figur A.3.** Sträckan  $GL$  dras, vilket ger de två rätvinkliga trianglar  $GAL$  respektive  $GKL$ .



Vi inför nu beteckningarna:  $a = AG = AB$ ,  $b = AK = BF$ ,  $c = KL$ ,  $d = GK$ ,  $e = GL$ .



**Figur A.4.** De två rätvinkliga triangelarna GAL och GKL, som fås från figur A.3.

Eftersom triangel GAL och triangel GKL är rätvinkliga, se figur A.4 (och figur A.3), så gäller Pythagoras sats. I triangel GAL är då

$$a^2 = (b+c)^2 + e^2 = \left(b + \frac{a-b}{2}\right)^2 + e^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + e^2 \Leftrightarrow$$

$$e^2 = a^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 - a^2 - 2ab - b^2}{4} = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{4} \quad (\text{i}).$$

I triangel GKL är

$$d^2 = c^2 + e^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + e^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + e^2 \quad (\text{ii}).$$

Andra likheten i (i) samt andra likheten i (ii) gäller eftersom sträckan  $AB = AK + 2 \cdot KL$  (ty  $KL = LB$ , enligt figur A.3), vilket med våra beteckningar ger att  $a = b + 2c \Leftrightarrow c = \frac{a-b}{2}$ .

Om vi nu sätter in (i) i (ii) så får vi att

$$d^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{4} = \frac{4a^2 - 4ab}{4} = a^2 - ab = a(a-b) \quad (\text{iii}).$$

Eftersom  $\phi = \frac{AB}{BF}$  (se steg 2b) så är, enligt våra beteckningar,  $\phi = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b\phi \quad (\text{iv})$ .

Om vi nu sätter in (iv) i (iii) så får vi att  $d^2 = b\phi(b\phi - b) = b^2\phi(\phi - 1)$ . Eftersom  $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$

(steg 2b) så är  $d^2 = b^2\phi \frac{1}{\phi} = b^2 \Leftrightarrow d = \pm b$ . Eftersom både  $d$  och  $b$  är sträckor, och därför är positiva, är  $d = b$ .

Eftersom  $d = GK$  och  $b = AK$  har vi nu visat att  $GK = AK$ .

*Steg 4.* Eftersom sträckan KB är parallell med sträckan HI (enligt konstruktion) är trianglarna GHI respektive GKB likformiga enligt topptriangelsatsen. Enligt definitionen av likformighet gäller då att

$$\frac{GH}{HI} = \frac{GK}{KB} \Leftrightarrow \frac{AF}{HI} = \frac{GK}{KB} \Leftrightarrow \frac{AF}{HI} = \frac{AK}{KB} = \phi = \frac{AF}{AB}.$$

Första ekvivalenspilen fås enligt konstruktion ( $GH = AF$ ) och andra ekvivalenspilen från steg 3 ( $GK = AK$ ). Näst sista likheten fås från steg 2b och sista likheten fås från steg 2a.

$$\text{Alltså är } \frac{AF}{HI} = \frac{AF}{AB} \Leftrightarrow HI = AB.$$

VS

**Notering:**

**I.** Vi har här bevisat att längden på den regelbundna femhörningens sidor är lika med AB, dvs  $AG = AH = GF = FI = HI = AB$ . Vi har även bevisat att längden på den regelbundna femhörningens diagonaler (som alla är lika långa) är lika med AF, t ex  $GH = GI = AF$ .

Eftersom  $\phi = \frac{AF}{AB}$  (steg 2a) har vi nu bevisat att  $\phi = \frac{d}{s}$ , där d står för diagonallängd och s för sidlängd, vilket utlovades i 4.3.2 (se figur 8).

**II.** Vi har även bevisat, som utlovat i 4.3.2, att  $BF = AK$  (steg 1) och att  $\phi = \frac{AK}{KB}$  (steg 2b).

Detta ger en koppling mellan gyllene snittet och den femuddiga stjärnan (se figur 13).