Vad vet vi om

hur matematiklärare arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper?

Tomas Bergqvist
Jesper Boesen
Mikaela Nyroos

NCM, Göteborgs universitet och
UFM, Umeå universitet i samverkan
på uppdrag från Skolverket

.

Innehåll

1 Inledning **5**
1.1 Inledande bild om en lärares arbete 5
1.2 Om uppdragstagaren 6
1.3 Uppdraget 7

2 Mål för att utveckla elevers matematikkunskaper **9**
2.1 Jämförelse mellan styrdokument 9
2.2 Styrdokumenten med kompetensglasögon 12

3 Insamling, läsning och strukturering **14**
3.1 Lärares arbete 14
3.2 Specificering och tolkning av uppdraget 15
3.3 Litteratursökning 16
3.4 Bearbetning, strukturering och kategorisering 17

4 De stora undersökningarna **20**
4.1 Statskontorets undersökning 2007 21
4.2 Nationella utvärderingen 2003 23
4.3 Timss 2003 27
4.4 Lusten att lära 2001-2002 31

5 En heterogen samling forskningsstudier **35**
5.1 Kategorisering av litteraturen 35
5.2 Forskningsartiklarna 36
5.3 Doktorsavhandlingarna 39

6 Diskussion **45**
6.1 Vad säger underlaget sammantaget? 46
6.2 Tretton kortsvar – Resultaten i relation till ursprungsfrågorna 48

Referenser **51**

.

1 Inledning

1.1 Inledande bild om en lärares arbete

Om Karl Petter Nordlund 'vår förste store matematikmetodiker' och av Fridtjuv Berg kallad 'en undervisningskonstens mästare' (Johansson och Wistedt, 1991), citatet kommer från Almquist (1919, s. 32 – 33):

> Jag fick nu av honom om hans personliga och lärarutveckling höra åtskilligt, som är värt att bevara från glömskan, såsom i högsta grad belysande för våra bildningsförhållanden under ett för vår kultur viktigt halvsekel.
>
> Först hur han blev matematiker. Han hade genomgått hela nederskolan utan att få intresse för något i den kunskap där meddelades. Felet var det, att ingen lärare ännu förmått att taga hans eget tänkande i användning. Så var han kommen upp i kvarta och fick börja läsa Euklides för Kjelldahl. Hans matematiska läggning började göra sig gällande, hans fantasi sattes i verksamhet – mången skulle tycka det var en märklig verkan av Euklides! – och han fick för första gången ett intresse för vad som i skolan lärdes. Men att man kunde och skulle tänka var honom fortfarande fördolt, han läste Euklides utantill, som han var van att lära sig allt annat, och blev som de andra utanläsarna utsatt för Kjelldahls skoningslösa drift – detta ansågs på den tiden endast som en matematiklärares skyldighet mot sitt ämne (se Nybloms "En sjuttioårings minnen" och Alexander Kjellands "Gift") –, fast Kjelldahls skarpa logik och drastiska kvickhet gjorde hans drift kännbarare än andras. K. hade ärvt sitt sätt av sin lärare "le grand Svanberg", på vars drastiska drift senare skall ges ett exempel. Det var först Hultman, som bröt denna tradition, vilken inte ännu är alldeles utrotad i skolan.
>
> Så drog Nordlund sig fram, tills man hunnit till problemerna i propositionerna 9 – 12, grundade på de båda första fallen av trianglars kongruens. Denna väcka alltid pojkars intresse, också Nordlunds intresse var så starkt, att han måste fråga, naturligtvis inte läraren, det gick inte an, utan klassens "primus" Viktor Norling: "ibland säger du, att trianglarna äro kongruenta enligt 4:e, ibland enligt 8:e" ja, fick han till svar, när alla sidor äro lika, är det enligt 8:e, när två sidor och mellanliggande vinkel äro lika är det enligt 4:e. Nu gick ljus upp för Nordlund: man skulle tänka! Det hade han nog gjort i praktiska saker – han var ju i hela livet

> en erkänt praktisk karl, som student nationens andra kurator – men i skolan hade han aldrig förr tänkt. Från den stunden blev han matematiker och Kjelldahls förklarade gullgosse.
>
> Det kan förefalla otroligt, att en den lärda skolans alumn under 6 års skolkurs aldrig tänkt en tanke. Men för den, som verkligen känner den gamla skolan, är det ingen orimlighet alls. Man får ej sällan höra om den gamla skolan, att den satt tanken i högsätet, varmed man vill uttrycka dess ensidiga försummande av fantasilivet. Men mycket mera sanning kunde sägas, att tanklösheten satt i högsätet. D.v.s. där meddelades nog tankar, men andras, lärobokens eller någon gång lärarens, vilka lärjungen såsom det både för läraren och honom bekvämaste och säkrast inlärde ordagrant; vad han därvid tänkte eller om han tänkte något alls, det fick vara hans ensak – det var både dess styrka och svaghet.

Den bild som här målas upp av Almquist om Karl Petter Nordlunds skolerfarenhet och indirekt om hans matematiklärare är nedtecknad för nära nog ett sekel sedan. Ändå är det inte alls en orimlig tanke att många elever idag bär med sig liknande erfarenheter från vår moderna skola. Vår ambition med föreliggande kunskapsöversikt är att sammanställa den forskning som finns och som gäller för svenska förhållanden om hur lärare idag arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper.

1.2 Om uppdragstagaren

Denna kunskapsöversikt är framtagen på uppdrag från Skolverket. Två miljöer har samverkat i arbetet, Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM vid Göteborgs universitet och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik, UFM vid Umeå universitet.

NCM är det av regeringen inrättade nationella resurscentrumet för matematik med uppgift att stödja utvecklingen av svensk matematikutbildning från förskola till gymnasieskola och vuxenutbildning. Genom olika regeringsuppdrag och uppdrag från Skolverket, Myndigheten för skolutveckling och Valideringsdelegationen har NCM tagit fram flera forskningsöversikter, ofta i samverkan med centrumets nationella och internationella forskarnätverk och med hjälp av NCMs nationella forskningsbibliotek. NCMs personal omfattar lärare med lång erfarenhet från samtliga skolformer varav 5 är forskarutbildade. Se vidare *http://ncm.gu.se*

UFM utgör Sveriges största matematikdidaktiska forskargrupp med bl.a. 2 professorer och 10 disputerade samt 5 doktorander som alla är aktiva forskare inom ett flertal extern och internfinansierade projekt. Matematikdidaktik

är ett av Umeå universitets 12 prioriterade forskningsområden. Flera av dessa forskare har genomfört forskningsprojekt med relevans för den aktuella kunskapsöversikten. För mer information om UFM:s inriktning, medverkande, publikationer, mm., se *www.ufm.org.umu.se*

Centrumen har tillsammans omfattande resurser i form av referensbibliotek, vetenskapliga nätverk och kontakter. Det finns också aktiva seminarieserier och andra forum där arbetet med kunskapsöversikten utvecklats.

1.3 Uppdraget

Bakgrunden till uppdraget är en önskan från Skolverket om att få en empiriskt och vetenskapligt välbelagd grund för att tolka, förklara och förstå resultaten från de internationella undersökningarna Timss, Timss Advanced och Pisa.[1] En motsvarande kunskapsöversikt med inriktning mot läsning och läsundervisning har tidigare tagits fram, Skolverkets rapport 304, med motsvarande syfte för PIRLS- och Pisa-resultat (Skolverket, 2007b).[2]

Uppdraget innebär att utarbeta kunskapsöversikt(er) om matematikundervisning i grundskolan (med särskilt fokus på de fyra första och de tre sista åren) och gymnasieskolan (med särskilt fokus på matematik D och E, naturvetenskaps- och teknik-programmen). Den övergripande frågan är

- Hur arbetar lärare i matematik för att utveckla elevernas matematikkunskaper?

Underlag för kunskapsöversikten ska vara forskning eller andra vetenskapligt utförda undersökningar avseende den svenska skolan. Undersökningarna ska främst ha genomförts under senare år (sedan omkring år 1995), men även mer långsiktiga trender är av intresse. På en mer detaljerad nivå kan översikterna behandla exempelvis

- innehållet i undervisningen,
- hur lärarna använder läromedel,
- hur matematikundervisningen går till och organiseras,
- läsförståelse och matematikkunskaper,

[1] För aktuell information om respektive studie se *http://www.skolverket.se/*

[2] Läsaren antas bekant med Timss, Timss Advanced och Pisa. PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study) är en internationell studie av läsförmågan hos elever som organiseras av IEA (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement), det vill säga samma organisation som håller i Timss och Timss Advanced. IEA är en internationell organisation som bland annat genomför studier för att jämföra länders skolsystem. Se vidare *http://www.skolverket.se/sb/d/253*

- hur lärare arbetar med progressionen i alla elevers kunskapsutveckling,
- hur dokumentationen av kunskapsutveckling sker i skolan,
- vad som gynnar elevernas måluppfyllelse,
- om det är någon skillnad i matematikundervisning med avseende på flickor och pojkar,
- om det är någon skillnad i undervisningen utifrån elevens sociala, etniska eller språkliga bakgrund,
- om undervisningen i matematik har ändrats under de senaste 10-15 åren,
- lärarnas förutsättningar (ramar),
- om lärares formella kompetens har förändrats över tid,
- och om möjligt i vad mån lärare tar del av forskningsresultat om kunskapsutveckling i matematik för den aktuella åldersgruppen.

2 Mål för att utveckla elevers matematikkunskaper

De läroplaner (Utbildningsdepartementet, 1994) som fastställdes i början av nittiotalet innebar i mångt och mycket en helt ny typ av läroplaner.

> De mål som läroplaner och kursplaner anger uttrycks mindre i stoff och mer i termer av begrepp, sammanhang och i kunskap som instrument för lärande. (Lundgren, 1999, sidan 39)

Lundgren menar att detta ställer helt nya krav på lärares profession eftersom de nu måste ta ställning till grundläggande läroplansteoretiska frågor, som urval och organisation av kunskap. Enligt Lundgren (1999) är det också uppenbart att den vagt formulerade läroplanen, i större utsträckning än tidigare läroplaner, bör stimulera till lokala diskussioner om mål och innehåll.

Vad gäller matematikutbildningen kan nittiotalets nya styrdokument ur denna aspekt ses som en av de större reformer som initierats. Den baseras på att det är otillräckligt att formulera målen med matematikutbildningen enbart i *innehållsmål*, vilket man tidigare gjort både på övergripande nivå (t.ex. aritmetik, algebra, geometri, statistik) och på mer detaljerad nivå (t.ex. multiplikationstabeller, ekvationslösning, areaberäkning, medelvärde). Det sågs nödvändigt att även formulera *kompetensmål* eller mål i termer av förmågor. Även om delar av dessa senare mål varit möjliga att tolka in i tidigare styrdokument, har de fått betydligt mer framträdande roller (Wyndhamn, Riesbeck, och Schoultz, 2000).

2.1 Jämförelse mellan styrdokument

Inledningsvis kan sägas att det för grundskolans del finns en del texter som beskriver och kommenterar skillnader mellan gällande och tidigare styrdokument, men att det för gymnasiets del helt saknas motsvarande arbeten.

För grundskolan finns det kursplaner som började gälla från 1969, 1980 och 1994, medan motsvarigheterna för gymnasieskolan endast är 1970 och 1994. Detta innebär att det mellanled som finns för grundskolan, i och med 1980, saknas för gymnasieskolan. Om man delar synen i de analyser (eller kommentarer kring) kursplanernas 'progression' som gjorts i de texter som vi kort kommer att redovisa nedan, kan man tänka sig att lärare på gymnasiet missat ett utvecklingssteg i kursplaner och att övergången till 1994 därför blivit ett mycket större steg för dessa lärare. Man kan också tänka sig att den praktik som utvecklats befästs på ett betydligt starkare sätt i och med att den fått gälla i 24 år.

Förändring i grundskolans kursplaner – från 1962 till 1994
Vilka har tidigare jämfört kursplanerna för grundskolan? Följande texter behandlar på olika sätt och i varierande grad skillnaderna i de olika kursplanerna Kjellström och Skolverket (2005); Skolverket (1997); Unenge (1999); Wyndhamn (1997); Wyndhamn m.fl. (2000)

Kjellström och Skolverket (2005) tar i huvudsak endast upp Lgr80 som jämförelse, medan de arbeten som är gjorda av Unenge och Wyndhamn och Skolverket (1997) även går längre tillbaka i tiden, några förarbeten också tas upp[3]. Den bild som målas upp är dock ganska lik, nedan försöker vi beskriva de väsentligaste skillnaderna. För tydlighetens skull görs det i punktform, där vissa punkter delvis är överlappande.

- Kursplanernas omfång, 1962 475 sidor, 1980 161 sidor och 1994 endast ett fåtal sidor.
- 1962-80 beskrivs mål och undervisningens innehåll, 1994 endast mål, inget om hur dessa skall nås.
- I 1994 ses ett kraftigt nedtonande av 'räknandet' till exempel nämns räkning, inklusive huvudräkning endast 3 ggr i 94 jämfört med ca 40 ggr i 1980. Förmågan att förstå och använda grundläggande talbegrepp blir viktigare. Kommentar: Det behöver inte tolkas som att behovet av goda räknefärdigheter minskat i betydelse, snarare att andra färdigheter också lyfts fram.
- Vissa moment utgår och andra kommer in, tex införs statistik och sannolikhetslära, enligt Unenge försvinner till exempel kvadreringsreglerna och räkning med irrationella tal.
- Kring 1980 förs en debatt om baskunskaper, preciseringen resulterar i begreppen nödvändiga- och önskvärda färdigheter. Såsom dessa var formulerade kom önskvärda att fungera som ett "tak", medan det för 1994 i och med "mål att sträva mot" saknas tak.[4]
- Kursplanen 1980 innebar att problemlösning var ett mål med matematiken, medan det 1994 också kom att bli ett sätt att lära sig matematik. Det vill säga en förskjutning från enbart mål mot mål och medel.

[3]För en översikt och en bakgrundsbeskrivning av skolans matematikämne i en internationell belysning se Emanuelsson, Johansson, och Lingefjärd (1992).

[4]Som parantes kan nämnas att de alternativa kurser, det vill säga allmän- och särskild kurs försvann i och med 1980, men fanns kvar i timplanen och det gavs olika centrala prov under många år.

- Wyndhamn (1997) menar att ”numeracy” kan sägas fånga andemeningen i läroplanstexten för 1994.

- Kursplanerna 1994 innebär en minskning av räkning och ökning av kommunikativa förmågor samt ökat fokus på begreppsförståelse.

- Kursplanerna och läroplanen 1994 innebär ett förtydligande av kunskapssynen, exempelvis genom olika uttryck för kunskap, till exempel de fyra F:en – fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet se även Norrgren (1993) samt Läroplanskommittén och Skolverket (1994).

- Kursplanerna och läroplanen 1994 betonar i högre grad funktionella kunskaper än tidigare planer.

- Kursplanerna och läroplanen 1994 hade en högre samstämmighet mellan läro- och kursplan.

- Skolämnet matematik vidgas och får en delvis ändrad karaktär från 1994. Matematiskt-tänkande och kommunikation får en mer framträdande roll. Den kunskapande processen betonas, det vill säga *hur* elever kommer fram till sina lösningar.

- Man går från (1980) detaljerade anvisningar av matematikinnehållet och vad som skall göras på respektive stadium, till (1994/2000) mer övergripande och inte så detaljerade målformuleringar (dock ibland specifika för kunskapsområdet).

Skolverket (1997) s40-41 sammanfattar förändringarna:

- Från kursplaner och timplaner årskurs för årskurs, via stadievisa kurs- och timplaner till planer för hela grundskolan utan nationellt fastställd etappindelning.

- Från central regelstyrning till decentraliserad, deltagande målstyrning. Från momentförteckning över innehåll och aktiviteter till mål att sträva mot och mål att uppnå, som innebär att få tilltro till, använda, utnyttja, inse, förstå, förklara, argumentera, dra slutsatser, tolka, granska, sammanställa, analysera, värdera, generalisera, känna igen, ange, avbilda, beskriva, bestämma, ställa upp, räkna, formulera och lösa, jämföra, uppskatta, mäta.

- Från räkning och geometri till aritmetik, geometri, algebra och funktioner samt statistik och sannolikhet. Symbolspråk och generalisering är matematikens styrka.

- Från algoritmräkning till taluppfattning och allsidiga räknefärdigheter med och utan hjälpmedel.
- Från regelstyrda räknefärdigheter och regelstyrd problemlösning till utveckling av elevers tänkande och resonerande i matematik, för att upptäcka, utforska och befästa i meningsfulla sammanhang.
- Från matematik som formellt, kontrollerande verktyg till matematik för reflektion, kommunikation och problemlösning i ett demokratiskt samhälle.

Förändring i gymnasiets kursplaner – från 1970 till 1994
Det närmsta man kommer en jämförelse mellan äldre och gällande styrdokumenten i skriven form för gymnasieskolan, åtminstone som vi funnit, är Emanuelsson (2001a) där fortbildningsinsatser behandlas. Detta arbete innefattar egentligen ingen jämförelse av kursplanerna, dock kommenteras alla fortbildningsinsatser som genomförts under åren 1965-2000 för både grundskolan och gymnasiet. Fortbildningsinsatserna har dock ofta hängt samman med kursplanerevisioner och därmed kan vissa tidstypiska drag skönjas. Den utveckling som skett för grundskolan kan sägas ha sin motsvarighet på gymnasiet och de drag som redovisats för grundskolans del på de föregående sidorna kan antas gälla även för gymnasiets del.

2.2 Styrdokumenten med kompetensglasögon

Ett sätt att strukturera matematikens kursplaner för att synliggöra de aspekter som Lundgren (1999) lyfter fram och som är centrala i reformen är via kompetens- eller förmågebeskrivningar. Kompetensmålen sammanfattar också väl vad den samlade internationella matematikdidaktiska forskningen och många andra utvecklingsaktörer anser beskriva de mest angelägna reformerna. Detta uttrycks ibland på lite olika sätt med delvis olika terminologi. Ett exempel, och den kanske mest genomarbetade beskrivningen, ges av det som i NCTM Principles and Standards (NCTM, 2000) kallas processmål (problemlösning, resonemang, kommunikation, sammanhang, representation). Detta ramverk, och dess föregångare, är forskningsbaserade (även om de i realiteten också skall ses som politiska dokument) och har varit utgångspunkt för en mycket stor mängd empiriska studier av både traditionella och alternativa undervisnings- och lärandesituationer (Kilpatrick, Martin, och Schifter, 2003). Samma typ av målbeskrivning finns t.ex. i det danska KOM-projektet (Niss och Jensen, 2002; Niss, 2003), i 'Adding it up'

(Kilpatrick, Swafford, och Findell, 2001) och används även i de stora internationella jämförelserna Timss och Pisa (Mullis, Martin, Smith, Garden, Gregory, Gonzalez, Chrostowski, och O'Connor, 2001; OECD, 1999).

Att principen bakom kompetensmålen är tillämpningsbar även för svenska styrdokument visas av Palm, Eriksson, Bergqvist, Hellström, och Häggström (2004), som baserat på denna princip identifierar problemlösnings-, algoritm-, begrepps-, modellerings-, resonemangs- och kommunikationskompetenser som mål i våra svenska matematikkursplaner. De svenska kursplanerna är dock mycket kortfattat skrivna och innehåller väsentligen inga tolkningar av vad dessa sex kompetenser egentligen består av. Därför specificeras de nedan med hänvisning till de internationellt etablerade och mer utförliga ramverkan ovan samt via exempel på etablerad forskningslitteratur enligt följande:

Med *problemlösningskompetens* menas att kunna lösa uppgifter där uppgiftslösaren inte har någon färdig lösningsmetod tillgänglig (Schoenfeld, 1985; NCTM, 2000; Niss och Jensen, 2002).

Algoritmkompetens innebär att kunna identifiera vilken algoritm som lämpar sig för en viss uppgiftstyp samt att kunna tillämpa algoritmen (Vinner, 1997; Mullis m.fl., 2001).

Begreppskompetens är förtrogenhet med innebörden av ett begrepps definition, inklusive att definiera och använda dess innebörd (Skemp, 1978; Tall och Vinner, 1981; NCTM, 2000).

Modelleringskompetens innefattar att utifrån utommatematiska situationer skapa och använda en matematisk modell, tolka samt utvärdera den genom att klargöra dess begränsningar och förutsättningar (Niss och Jensen, 2002; NCTM, 2000).

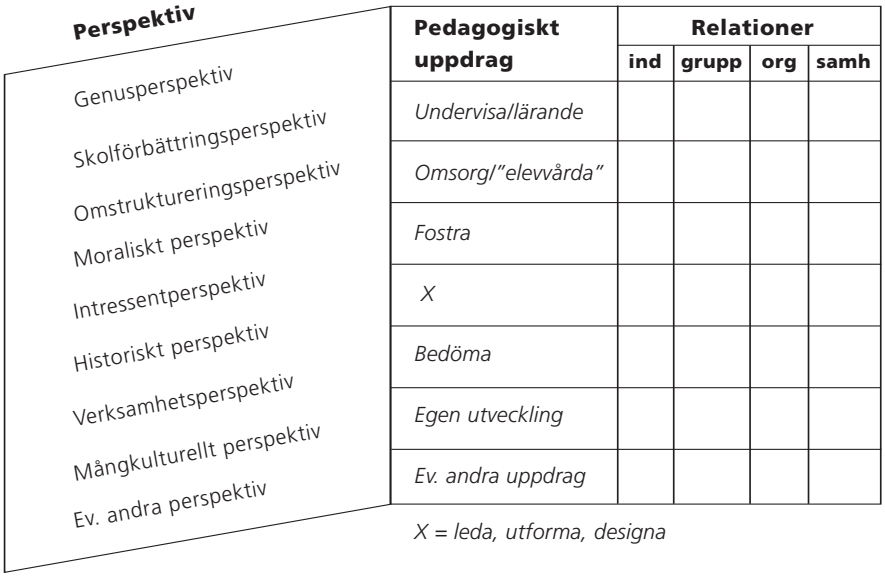
Resonemangskompetensen beskriver förmågan att kunna argumentera på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder, och inkluderar även undersökande verksamheter som att hitta mönster, formulera, förbättra och undersöka hypoteser (Pólya, 1954; Niss och Jensen, 2002; NCTM, 2000).

Med *kommunikationskompetens* avses förmågan att kunna kommunicera om matematiska idéer och tankegångar såväl i muntlig som i skriftlig form (Niss och Jensen, 2002; NCTM, 2000).

3 Insamling, läsning och strukturering

3.1 Lärares arbete

Hösten 2004 anordnade Myndigheten för skolutveckling en konferens i Villa Brevik på temat 'Lärares arbete'. Konferensen samlade pedagogikforskare som reflekterade kring temat utifrån olika perspektiv. För att kunna hålla samman olika synsätt och olika aspekter av lärares arbete togs en modell – eller ett förslag till struktur – fram som en grund för den fortsatta diskussionen, se figur 1. "Strukturen visar det oerhört komplicerade uppdrag en lärare har och hur många olika sätt det finns att försöka analysera eller beskriva det." (Lidholt, Boström, och MSU, 2006, s. 12). Modellen visar på



Figur 1: Lärares arbete – ett mångfacetterat uppdrag.

en mångdimensionalitet på flera olika plan, dels gällande de olika delarna i det pedagogiska uppdraget, dels gällande relationerna mellan lärare och individuell elev, lärare och undervisningsgruppen, lärare och föräldrar, lärare och skolledning och så vidare, men också med avseende på med vilka ögon lärares praktik studeras, till exempel om det sker ur ett genusperspektiv, skolförbättringsperspektiv eller om det som i vårt fall, som en följd av uppdragsbeskrivningen, sker ur flera olika perspektiv.

När det gäller lärares arbete finns det, förutom den för oss centrala frågan om vad som skall inkluderas i deras arbete, en mängd olika fakto-

rer och ramar (fasta och rörliga) som på olika sätt styr, påverkar, begränsar och/eller influerar arbetet. Lärares arbete regleras av en rad styrdokument; skollag, förordningar, läroplan, enskilda kursplaner och olika lärare har olika huvudmän, inom områden med skiftande socioekonomiska förutsättningar, med motiverade elever och kollegor, utan motiverade elever och kollegor och så vidare. Lärare påverkas också av den lokala skolkulturen, relationen till föräldrar och inte minst av de komplexa förhållanden som finns mellan undervisning och elevers lärande, se exempelvis (Lundgren, 1972; Bentley, 2003; Loef Franke, Kazemi, och Battey, 2007; Hill, Sleep, Lewis, och Ball, 2007).

3.2 Specificering och tolkning av uppdraget

Bland alla de arbetsuppgifter som ingår i lärares arbete fokuserar vi i den här översikten i första hand det som *sker i klassrummet* – den undervisning, handledning och bedömning av elevers kunskaper med mera som utförs för att nå målen, väl medvetna om att gränserna mellan vad som sker i och vad som sker utanför klassrummet många gånger är svåra att dra. Vi behandlar till exempel inte lärares fortbildning, det som sker under förtroendetiden, elevvårdande eller generellt fostrande aktiviteter. När det gäller relationen mellan huvudfrågan och de förslag till underfrågor som följde med uppdraget så anser vi att flera av underfrågorna är av en annan karaktär än huvudfrågan och därmed blir svåra för oss att behandla. För en del av underfrågorna och närliggande frågor finns det också relativt aktuella översikter som vi hänvisar till (Sterner och Lundberg, 2002; Rönnberg, Rönnberg, och Skolverket, 2001; Wallby, Carlsson, Nyström, och Skolverket, 2001).

Ytterligare en specificering rör en fråga som i praktiken gäller för alla arbeten av den här karaktären, men som inte alltid görs explicit. Frågan hur arbetar lärare i matematik för att utveckla elevernas matematikkunskaper kommer i vårt arbete snarare att omvandlas till *vad vet vi om* hur lärare arbetar i matematik för att utveckla elevernas matematikkunskaper? Denna specificering kan tyckas onödig och kanske självklar, men avsikten med översiktsarbeten är oftast dubbel: i) ge kunskapsunderlag för att svara på vissa frågeställningar och ii) redogöra för hur kunskapsläget ser ut, vad är dess karaktär samt dess begränsningar. Det gör också att vi väljer att följa uppdragsformuleringen strikt när det gäller underlag, vi behandlar endast underlag som rör den svenska skolan. Det finns givetvis omfattande forskning om undervisning och lärande som inte nödvändigtvis är bundet till ett speciellt land, men som en följd av vår tolkning bedömer vi att dessa underlag faller utanför ramarna för detta uppdrag.

Ursprungligen gällde förfrågan två översikter, en för grundskolan och en för gymnasieskolan. Då vi åtog oss uppdraget, argumenterade vi för att sam-

ordningsvinsterna skulle vara stora om samma uppdragstagare åtog sig arbetet med båda översikterna. Efterhand som vi blivit mer förtrogna med empirin bedömde vi att det skulle passa bättre med en översikt som enhetligt behandlade hela skolan. Framförallt så bygger detta på att forskningsunderlaget som helhet, när det gäller hur matematiklärare arbetar under svenska förhållanden faktiskt är förhållandevis begränsat och heterogent och helt enkelt inte räcker till två översikter. Detta ger också en första indikation om kunskapsläget.

3.3 Litteratursökning

En första sökningsomgång genomfördes med hjälp av NCMs bibliotekarie. Denna sökning gjordes i den svenska katalogen Libris i såväl fälten Fritext som Ämnesord med specificeringen språk: svenska och med olika kombinationer och trunkeringar av söktermerna matematikundervisning respektive matematikutbildning. Vi sökte också på motsvarande sätt med engelska sökord och swed* (Sweden eller Swedish). Därefter gjordes kompletterande sökningar med närliggande söktermer samt med Libris klassningskod för matematikundervisning (Eabt).

Denna första omgång gav över 800 träffar. Från det materialet gjordes en manuell rensning av det som låg utanför uppdragsbeskrivningen, det vill säga sådant som behandlade förskolan, vuxenutbildningen samt det som inte handlade om svensk undervisning. Då återstod cirka 600 titlar. Efter ytterligare en bortrensning av det som uppenbart inte rörde forskning eller vetenskapligt belagda studier återstod drygt 300 arbeten.

Med motsvarande förfarande sökte vi även i andra internationella pedagogiska och samhällsvetenskapliga databaser (Främst MathEduc som är den stora matematikdidaktiska databasen men även i Academic Search Elite, Eric, Scopus och Google Scolar[5]).

Avslutningsvis gjorde vi kompletterande sökningar i MathEduc på de författare som nu fanns med i vår förteckning. Efter dessa kompletteringar gjordes en mer noggrann granskning och genomgång varpå ytterligare ett stort antal arbeten rensades bort eftersom de inte kunde kategoriseras som forskning. Till slut återstod 229 arbeten som i olika hög grad kunde knytas till vårt uppdrag, se vidare avsnitt 3.4. Det bör nämnas att det bland dessa återstående arbeten kan förekomma viss dubblering av innehållet. Till exempel har ett arbete som presenterats dels via en licentiatavhandling och en doktorsavhandling gett upphov till två träffar, även om det i många fall delvis är samma innehåll.

[5]Se *http://ncm.gu.se/bibliotek*

3.4 Bearbetning, strukturering och kategorisering

Vid läsningen av de 229 arbeten som fanns kvar använde vi följande procedur. Vi antecknade och noterade a) innehållet i texten, dess syfte och mer specifikt b) huvudresultaten och slutsatserna, c) vilken metod som använts för att nå resultaten och d) kort om hur tydlig underbyggnaden var. Med dessa skisser som grund kategoriserades sedan alla arbeten ur två perspektiv. Det första perspektivet har sitt ursprung i Skolverkets uppdrag och innebär i vilken utsträckning ett arbete bedömdes vara relevant i förhållande till huvudfrågan. Dessa 'relevansnivåer' kan kort beskrivas så här:

Relevansnivå 1 Arbeten som har sitt huvudfokus på hur lärare i matematik arbetar i klassrummet.

Relevansnivå 2 Arbeten som fokuserar på olika aspekter av elevers lärande av matematik. Studier i denna kategori kan ge oss god information om hur lärare arbetar genom att elevers lärmiljö studeras.

Relevansnivå 3 Arbeten som exempelvis fokuserar på lärarutbildning, lärarfortbildning och studier av lärande på universitetsnivå, eller arbeten som behandlar olika typer av övergripande frågor på systemnivå. Det är svårare att se direkta kopplingar från dessa arbeten till huvudfrågan.

Relevansnivå 1 är huvudfokus i översikten och innehåller de arbeten som har högst relevans i förhållande till uppdraget. Dock har vi i våra analyser noterat att det är en ganska liten del av den matematikdidaktiska forskningen som har detta fokus och därför har vi också tagit med de arbeten som hänförts till relevansnivå 2 i denna genomgång. Relevansnivå 3 är längre ifrån huvudfrågan och därför har dessa studier behandlats endast i begränsad utsträckning, det vill säga att de har endast har blivit kategoriserade och att de inte nämns vidare i texten.

Det andra perspektivet vi har arbetat med gäller forskningens innehåll. Här har vi utgått från den kategorisering som Strässer och Vetenskapsrådet (2005) gjorde och som bygger på PME:s[6] lista över forskningskategorier (Cockburn och Nardi, 2002). Syftet var att få en användbar struktur där så många av de arbeten som analyserats som möjligt kunde inrymmas. Vi slagit samman några av Strässers kategorier och plockat isär andra. Vi har försökt uppnå ett hanterbart antal kategorier som inte överlappar varandra i för stor utsträckning och har kommit fram till en uppdelning i 10 kategorier.

[6]The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

A Problemlösning, resonemang och matematiskt tänkande

B Genus

C Språk, texter, läroböcker, läsning, kommunikation

D Attityder och motivation

E Vardagsanknytning, vardagsproblem och utomhusmatematik

F Kunskapsbildning, begreppsbildning, lärandeteori, kursplaner

G Elevgrupperingar, undervisningens organisation, klassrummets miljö

H Prov och bedömning, utvärdering

I Tekniska hjälpmedel

J Specialpedagogik

En kategoriindelning kan skapas på många olika sätt. Ett alternativ som övervägdes var att utgå från den struktur som skapats i samband med de världsomspännande konferenserna ICME[7] eller till exempel den kapitelindelning som används i referensverket Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Lester och NCTM, 2007), men vi valde att utgå från den struktur som använts tidigare under svenska förhållanden för att möjliggöra jämförelser (Strässer och Vetenskapsrådet, 2005).

I uppdragsbeskrivningen ingick att underlaget skulle vara forskning eller andra vetenskapligt utförda undersökningar avseende den svenska skolan. Utan att här diskutera vad forskning är redogör vi kort för vilka underlag vi inkluderat och grunderna för dessa beslut. I vårt underlag finns arbeten av båda typerna, men de behandlas något olika.

När det gäller forskningsbidrag finns det en mängd olika publikationsformer. De bedöms också i akademiska sammanhang vara av olika vikt. Bland de 229 arbetena återfinns konferensbidrag, rapporter i olika institutionsserier, tidskriftsartiklar, licentiat- och doktorsavhandlingar. Från Skolverkets referensgrupp fick vi rådet att bara beakta artiklar publicerade i så kallade peer review-granskade tidskrifter, för att enklare kunna säkerställa att arbetena var av god vetenskaplig kvalitet. Vi har följt detta råd. Vi har därför inte tagit med till exempel beskrivningar av pågående forskningsprojekt eller andra studier som ännu inte är publicerade. Däremot har vi inkluderat

[7]Den elfte konferensen ICME 11, se *http://icme11.org/* äger rum i Mexiko sommaren 2008

doktorsavhandlingar i avsnitten 5.2 och 5.3 där vi behandlar innehållet i forskningsbidragen.

Under rubriken De stora undersökningar, avsnitt 4, återfinns vetenskapligt utförda undersökningar som inkluderats för att de kan ge oss en översiktlig bild av hur lärare arbetar. Detta i motsats till majoriteten av forskningsbidragen som mer är av fallstudiekaraktär.

4 De stora undersökningarna

I de följande avsnitten, 4.1 – 4.4, redovisas resultat som rör och beskriver svenska matematiklärares arbete och som i någon mening kan anses generaliserbara. De redovisade resultaten bygger i huvudsak på enkätunderlag och inte observationsdata. Lite tillspetsat kan man säga att delar av det som rapporteras här är vad lärare och elever själva säger om lärares arbete, inte nödvändigtvis vad som faktiskt sker i klassrummet. För *en* översiktlig redogörelse för de komplexa sambanden mellan vad lärare säger om sin praktik och vad forskare observerar i faktiska klassrumsstudier se exempelvis Speer (2005).

Det finns i huvudsak fyra undersökningar och studier från den aktuella tidsperioden (1995-) varifrån man kan få övergripande information om svenska matematiklärares behörighet och undervisning.[8] Statskontorets rapport om lärares utbildning och undervisning i skolan (Statskontoret, 2007), Timss 2003 (Skolverket, 2004b), Nationella utvärderingen 2003 (Kjellström och Skolverket, 2005) och Lusten att lära (Skolverket, 2003).

När det gäller karaktären på dessa arbeten är det endast Timss som kan betecknas som forskning. De andra arbetena är mer av undersökande och utredande karaktär och saknar den teoretiska förankring och de ramverk som finns i Timss. Vi har dock valt att inkludera dessa underlag för att de trots allt bär med sig mycket av den information som finns tillgänglig om hur svenska matematiklärare arbetar. Pisa-undersökningarna (Skolverket, 2001, 2004a, 2007a) innehåller inga egentliga lärardata och kommer därför inte att behandlas.

Timss 2003 behandlar lärare för elever i årskurs 8 och Nationella utvärderingen 2003 behandlar lärare för hela grundskolan. Lusten att lära-granskningen inkluderar alla skolformer förskolan, förskoleklass, grundskolan, grundskolans senare år samt gymnasiet och vuxenutbildningen. Lusten att lära-granskningen har utöver enkätdata också observationsdata i form av skolinspektörsbesök.

Varken Timss 1995 (Skolverket, 1998) eller föregående Nationella utvärderingen 1992 (Pettersson och Skolverket, 1994) behandlas direkt i denna översikt, dels gränsar de till att ligga utanför den avsedda tidsperioden, dels rör båda studierna skolan före reformeringen i början av nittiotalet. Den lärarenkät som traditionellt finns med i Timss och som ger information om lärares arbete fanns ej heller med för gymnasiedelen (Timss Advanced). Den skulle kunnat ge oss information om gymnasielärares arbete.

[8] Det finns också en del arbeten från enskilda forskare där delar av resultaten kan ses som generaliserbara, se vidare avsnitt 5.2 och 5.3.

Detta innebär att Lusten att lära-granskningen, förutom Statskontorets undersökning om behörighet, är det enda material i det här avsnittet som berör gymnasieskolan.

I det följande avsnittet redovisas resultat från Statskontorets stora undersökning om lärares behörighet. Det ersätter rapporteringen från de andra studierna på denna punkt på grund av sin aktualitet.

4.1 Statskontorets undersökning 2007

"Utbilda kvalificerade lärare i matematik för alla barn, ungdomar och vuxna" så lyder matematikdelegationens andra huvudförslag (Matematikdelegationen, 2004, sidan 19). Lärarens kompetens och arbetsvillkor var delegationens hjärtefråga.

Skollagen säger redan i första kapitlet (2 §) att alla barn och ungdomar oberoende av kön, geografisk hemvist samt sociala och ekonomiska förhållanden, skall ha lika tillgång till utbildning i det offentliga skolväsendet för barn och ungdom. Utbildningen skall inom varje skolform vara likvärdig, varhelst den anordnas i landet. Enligt skollagen är skolhuvudmännen också skyldiga att för undervisningen använda lärare som har en utbildning avsedd för den undervisning de i huvudsak ska bedriva.

De studier som matematikdelegationen genomförde med stöd av Skolverket och SCB visade att en stor del av de lärare som undervisar i matematik inte har en utbildning som motsvarar ansvaret. Det var dock svårt att få fram tillförlitliga siffror över hur stora dessa lärargrupper var inom olika skolformer/årskurser.

Statskontorets rapport som publicerades våren 2007 – Lärares utbildning och undervisning i skolan – ger svar på många av dessa frågor (Statskontoret, 2007). Man har undersökt i vilken utsträckning de lärare som undervisat under en given tidsperiod (i praktiken höstterminen 2006) har haft en utbildning som svarat mot de ämnen eller årskurser som de undervisat i.

I nedanstående tabeller har vi sammanställt några av de uppgifter om lärare i matematik som redovisas i rapporten. Det antal poäng[9] i undervisningsämnet som har krävts för undervisning i olika ämnen, årskurser och skolformer har förändrats över tiden. Vid äldre lärarutbildningar som till exempel låg- eller mellanstadielärarutbildning, framgår inte antalet poäng i undervisningsämnena i examensbeviset. I sina tabeller har Statskontoret för utbildning i matematik motsvarande minst 10 alt 20 poäng också räknat sådana examina där ämnet ingår i lärarutbildningen men där antal poäng

[9]Observera att detta är de så kallade gamla poängen, inte de nya Bolognaanpassade högskolepoängen.

inte framgår i examen. Tabellerna nedan visar exempelvis att

- 64 procent av lärarna som undervisar i matematik i årskurs 1–5 har både lärarexamen för dessa årskurser och utbildning i undervisningsämnet matematik (minst 10 poäng),
- 40 procent av lärarna som undervisar i matematik i årskurs 6–9 har både lärarexamen för dessa årskurser och utbildning i undervisningsämnet matematik (minst 20 poäng),
- 35 procent av lärarna som undervisar i matematik i gymnasiet har både lärarexamen för denna skolform och utbildning i undervisningsämnet matematik (minst 40 poäng).

Tabell 1: Förekomsten av lärare med lärarexamen som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 1–5

Lärarexamen	91 %
Lärarexamen för skolform/årskurs	83 %
Lärarexamen med utbildning i matematik ($\geq$ 10 p)	69 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 10 p)	64 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 20 p)	54 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 40 p)	2 %

Tabell 2: Förekomsten av lärare med lärarexamen som undervisar i matematik i grundskolans årskurser 6–9

Lärarexamen	78 %
Lärarexamen för skolform/årskurs	51 %
Lärarexamen med utbildning i matematik ($\geq$ 20 p)	61 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 20 p)	40 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 40 p)	16 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 60 p)	5 %

De flesta grundskolerektorer som Statskontoret har talat med prioriterar generellt sett lärarens pedagogiska kompetens högre än dennes ämneskunskaper. Det är dock en vanlig uppfattning att ämneskompetensen blir allt viktigare

Tabell 3: Förekomsten av lärare med lärarexamen som undervisar i matematik i gymnasieskolan

Lärarexamen	77 %
Lärarexamen för skolform/årskurs	43 %
Lärarexamen med utbildning i matematik ($\geq$ 40 p)	57 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 40 p)	35 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 60 p)	25 %
Lärarexamen för skolform/årskurs med utbildning i matematik ($\geq$ 80 p)	8 %

ju äldre eleverna blir. En del rektorer menar att fem till tio högskolepoäng i undervisningsämnet ger tillräckligt ämneskunnande för undervisning i grundskolan. Många grundskolerektorer menar också att det inte är ett problem att lärare undervisar i ämnen de inte har utbildning i, åtminstone inte i grundskolans tidigare år.[10]

4.2 Nationella utvärderingen 2003

Rapporteringen kring matematik från Nationella utvärderingen 2003 görs främst i fyra olika dokument. "Nationella utvärderingen av grundskolan 2003, sammanfattande huvudrapport" (Skolverket, 2004d) utgör en sammanfattning av resultatredovisningen. "Nationella utvärderingen av grundskolan 2003, huvudrapport" (Skolverket, 2004c) innehåller mer utförliga ämnesredovisningar. "Matematik årskurs 9" är en delrapport som skrivits av Katarina Kjellström och som enbart fokuserar resultat i matematik (Kjellström och Skolverket, 2005). Den sista rapporten heter "Grundskolans ämnen i ljuset av Nationella utvärderingen 2003 – Nuläge och framåtblickar" (Skolverket, 2005). Sammanställningen i detta avsnitt utgår huvudsakligen från den rapport som fokuserar på matematiken.

Det huvudsakliga syftet med den nationella utvärderingen formuleras på flera olika ställen, i Kjellström och Skolverket (2005, sidan 11) på följande vis:

> Syftet med den nationella utvärderingen 2003 var att skapa en gemensam utgångspunkt för statliga insatser genom att ge ett helhetsperspektiv på grundskolans måluppfyllelse och de faktorer som påverkar denna. Inriktningen var att klargöra om eleverna

[10]Textinnehållet i detta stycke presenterades först via ett aktuelltinslag som publicerades den 23 juni 2007 på NCMs webplats *http://ncm.gu.se/node/2012*

> utvecklar de kvaliteter i sina kunskaper som de statliga styrdokumenten anger, samt vilka utvecklingsriktningar som, i jämförelse med tidigare utvärderingsresultat, kan urskiljas generellt och i enskilda ämnen. Särskilt viktigt var att få underlag för att klarlägga situationen för de elever som inte uppfyller målen.

Vidare kan vi läsa om undersökningens uppläggning och genomförande (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 12):

> Matematikämnet undersöktes både via provuppgifter och genom frågor om ämnet och undervisningen till elever och lärare via enkäter. Ett mindre urval elever gjorde också en processtudie. Kunskapsnivån mättes med hjälp av det nationella ämnesprovet för årskurs 9, medan attityderna mättes med hjälp av en enkätstudie. Ett syfte var också att visa på utvecklingen sedan 1992 (förra utvärderingen) så de enkätfrågor som gick att återanvända ingick även denna gång.

I vår sammanställning fokuserar vi på den rapportering som rör lärarna. I det avsnitt i rapporten som rör lärare bereds det först med lärares åldersfördelning, deras behörighet, fortbildningsbehov, samarbete med kollegor, trivsel samt deras utgångspunkter för sin undervisning. Speciellt vill vi här lyfta fram den del som rör samarbetet med kollegor och den del som berör undervisningens utgångspunkter därför att de har mest relevans för vårt uppdrag.

> Lärarnas samarbete med ämneskollegor har minskat under de senaste fem åren. Var tredje lärare anger att antalet ämneskonferenser minskat. En femtedel av matematiklärarna tillhör ingen ämnesgrupp i matematik vare sig i den egna skolan eller med lärare från andra skolor. Den främsta funktionen för ämnesgruppen tycks vara att lärarna stödjer varandra och informerar varandra om vad de arbetar med. Däremot samarbetar man inte så mycket om direkta undervisningssituationer eller om den pedagogiska planeringen. Inte heller diskuteras innehåll i läroplan och kursplan eller kunskapskrav i någon större utsträckning. (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 60)

En trend som vi senare redovisar, det ökade enskilda arbetet, det vill säga elevers tysta individuella räknande kan möjligen i någon mening även tänkas gälla lärare i deras arbete.[11]

[11] I de många kontakter NCM har med verksamma lärare får vi ofta höra om sönderslagna ämnesarbetslag till förmån för ämnesintegrerade lag. Många lärare upplever detta som negativt för utvecklingen av undervisningen i matematik.

> I kursplanen beskrivs mål att sträva mot som det främsta underlaget för planeringen av undervisningen. Mål att sträva mot anger undervisningens inriktning när det gäller att utveckla elevernas kunskaper i matematik och sätter inte någon gräns för elevernas kunskapsutveckling. När lärarna får ta ställning till olika styrdokuments betydelse för undervisningen är det dock mål att uppnå som tillmäts störst betydelse. [...] Störst betydelse för undervisningen har enligt lärarna kursplanens mål att uppnå. Därefter kommer Läroplanens mål, kursplanens mål att sträva mot och betygskriterierna. Minst betydelse har de nationella proven. Matematik är det ämne med störst andel lärare (16 %) som inte tillmäter mål att sträva mot så stor betydelse för undervisningen. Enligt styrdokumenten ska undervisningen ha en inriktning mot mål att sträva mot. För lärarna är det målen att uppnå som är det som har störst betydelse. (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 62)

I Boesen (2006), som dock rör ett litet urval gymnasielärare, bekräftas indirekt fokuseringen mot mål att uppnå och förklaras av lärarna i studien med en strävan efter att får så många elever som möjligt godkända.

Vidare behandlar Kjellström och Skolverket (2005) hur undervisning och bedömning går till via underrubrikerna organisation, arbetsformer, grupparbete, möjlighet att påverka, läxor och bedömning. När det gäller organisation anger två tredjedelar av lärarna att de använder någon form av nivågruppering och ungefär en tredjedel av dessa undervisar i en svag eller långsam grupp. En absolut majoritet av lärarna uppger att deras lektionspass är kortare än 60 minuter, endast ett mycket litet antal lärare uppger att de är längre. När det gäller gruppstorlekar uppges det att ”mer än 75 procent av eleverna gick i en grupp som består av cirka 15–25 elever. Knappt 10 procent går i en grupp som består av 30 elever eller fler. Det är vanligare att elever som ej når godkänd går i små grupper, nästan 25 procent av dessa går i en grupp med färre än 5 elever.” (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 65)

På frågan om hur ofta läraren brukar ha gemensam genomgång i klassen, svarade knappt 40 procent av lärarna att de hade det i stort sett varje dag, närmare en fjärdedel av lärarna sade sig ha gemensam genomgång någon gång per månad eller ännu mer sällan.

När det gäller om eleverna redovisar lösningar och tankesätt inför klassen så uppges det ske till omkring 65 procent någon gång per månad eller mycket sällan eller aldrig. Då det gäller i vilken utsträckning eleverna diskuterar olika problem och lösningar tillsammans rapporteras att andelen som gör

det någon gång varje vecka eller oftare hade minskat från 54 procent 1992 till 46 procent 2003. Den närliggande frågan om grupparbeten behandlades i en så kallad processtudie i den nationella utvärderingen. Eleverna fick där göra ett mindre prov med kortsvarsuppgifter, två gruppuppgifter samt svara på några frågor som även lärarna fick svara på om hur de upplevde grupparbetet. Erfarenheten från processtudien kan sammanfattas på följande vis, "Grupparbeten i matematik tycks inte ha blivit så mycket vanligare under de senaste tio åren. En majoritet av eleverna uppger sig sällan eller aldrig arbeta i grupp och andelen som gör det minst en gång i månaden är 21 procent." (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 70).

Tabell 4: Procentuell andel lärare respektive elever som svarat på identiska frågor om arbetsformer (Kjellström och Skolverket, 2005, sidan 68)

		Varje/de flesta lektioner	Ibland	Sällan	Aldrig/ mycket sällan
Eleverna sitter och lyssnar, läraren pratar	Lärare	22	51	23	5
	Elever	30	47	18	6
Läraren pratar och ställer frågor, enskilda elever svarar	Lärare	30	53	15	3
	Elever	21	47	24	9
Läraren och eleverna diskuterar tillsammans	Lärare	34	56	9	1
	Elever	15	43	29	14
Eleverna arbetar i grupper	Lärare	16	44	33	8
	Elever	7	24	37	32
Eleverna arbetar var för sig	Lärare	68	26	5	1
	Elever	79	17	4	1
Eleverna genomför större arbeten eller projekt	Lärare	1	15	49	36
	Elever	4	13	25	58

Sammantaget ger detta, tillsammans med informationen i tabell 4, att det som, åtminstone tidigare, betraktats som traditionell undervisning – det vill säga att läraren leder lektionen, pratar och ställer frågor medan eleverna lyssnar och svarar – har minskat sedan den förra nationella utvärderingen 1992. Fram träder en bild om ett förhållandevis tyst klassrum, åtminstone då det gäller dialog mellan lärare och elev men även elever emellan och med få diskussioner trots det ökade fokus som denna viktiga matematiska kompetens fått i matematikens kursplaner sedan reformen i mitten på nittiotalet.

Ytterligare information om lärares arbete fås via elevernas svar om vilket inflytande de tycker sig ha över innehåll och arbetssätt. Matematik tillsam-

mans med naturorienterande ämnen är av alla grundskolans ämnen det ämne där eleverna i nationella utvärderingen upplever sig ha minst möjlighet att påverka innehåll och arbetsformer. En intressant iakttagelse är att ju högre slutbetyg elever har desto lägre inflytande upplever de sig ha över val av innehåll och arbetsformer. Att ge elever läxa är en del av lärares arbete som tycks ha minskat sedan föregående nationella granskning. En tredjedel av lärarna uppger att alla elever får samma läxor, en tredjedel uppger att eleverna får som hemuppgift att färdigställa det de inte hunnit med på lektionen och en tredje del ger alla elever läxor men olika beroende på eleven.

Det sista moment som vi redogör för med den nationella utvärderingen 2003 som ursprung i detta avsnitt rör lärares bedömning av elevers matematikkunskaper. Lärare använder egenkonstruerade prov i samma omfattning som de gjorde vid den förra nationella utvärderingen. De så kallade förlagsproven har dock ökat på bekostnad av de prov som lärare tidigare konstruerades tillsammans. Det senare ger möjligen ytterligare en indikation om att lärararbetet blivit mer individuellt.

Tabell 5: Procentuell fördelning av elevsvar på frågan: Hur tar läraren reda på vad du kan i matematik?

	Ofta eller ibland	Sällan eller aldrig
Prov	92	8
Genom att se vad jag gör	83	17
Skriftligt läxförhör	47	53
Muntligt läxförhör	25	75
Samtal i klassen	40	60
Redovisning av eget arbete	17	83
Redovisning av grupparbete	12	88

4.3 Timss 2003

De delar som här rapporteras från Timss 2003 bygger på den del av enkätstudien som rör lärarna (Alger, 2007; Skolverket, 2004b). Av naturliga skäl, eftersom Timss är en jämförande studie, görs det i några fall jämförelser med andra i studien ingående länder, oftast inom den så kallade 20-gruppen.[12]

Enligt enkätsammanställningen har eleverna 91 timmar i matematik i årskurs 8, vilket enligt uppgift från rektorerna motsvarar 10 procent av all

[12]20-Gruppen utgörs av länder med levnadsvillkor som motsvarar Sveriges med en tonvikt av närliggande länder (Skolverket, 2004b, sidan 21).

utlagd undervisningstid. Jämför man med genomsnittlig undervisningstid för 20-gruppen som är 118 timmar och där matematikandelen är 12 procent så är det bara Cypern som har lägre antal undervisningstimmar i matematik än Sverige. I det avsnitt i Timss-rapporten som redovisar vad eleverna gör på lektionerna konstateras att nästan alla svenska elever undervisas med hjälp av någon lärobok. Nio av tio lärare uppges också använda läroboken som sin huvudsakliga grund för lektionerna. Tillsammans med tidigare uppgifter om omfattning av läroboksanvändning (Kjellström och Skolverket, 2005; Skolverket, 2003) och Johanssons fallstudie (2006) om hur några lärare använder läroboken, så stärks bilden av en utbredd läroboksbundenhet. Även om användningen av läroböcker rapporteras vara utbredd i andra länder, så hör Sverige till de länder där högst andel av lärarna har läroboken som huvudsaklig utgångspunkt för sin undervisning.

I tabell 6 ser vi fördelningen över olika klassrumsaktiviteter som gäller för eleverna i årskurs åtta. Det som framträder som den dominerande aktiviteten är arbete med läroboksuppgifter. Slår man samman elevens självständiga arbete med arbete under lärarens handledning når vi 55 procent av lektionstiden. I jämförelse med andra länder ligger Sverige här över genomsnittet, det är den enskilt största skillnaden jämfört med andra länder. Följden blir att vi ägnar mindre tid åt genomgångar och läxgenomgångar. I elevenkäten

Tabell 6: Genomsnittlig andel i procent av lektionstid för olika klassrumsaktiviteter (Skolverket, 2004b, sidan 70)

Klassrumsaktivitet	Andel
Arbeta med uppgifter under lärarens handledning	37%
Arbeta självständigt med uppgifter utan handledning	28%
Lyssna till längre genomgångar	11%
Lyssna då läraren repeterar och ytterligare förklarar ämnesinnehåll eller metoder	9%
Delta i prov eller förhör	6%
Gå igenom läxan	4%
Andra elevaktiviteter	3%
Delta i aktiviteter som inte gäller lektionens innehåll/syfte (tex hålla ordning)	2%

uppger de svenska eleverna och elever i Japan och England att de ägnar minst tid åt läxor bland de deltagande länderna. Minst tid innebär här att dessa länder har högst andel elever som angett att de har en läxa som tar högst 30 minuter högst två gånger per vecka. Det går inte att finna några enkla

samband mellan läxor och resultat. Många länder har till exempel en omfattande extraundervisning, vilket svenska elever i mycket liten utsträckning har. Lärarna till tio procent av eleverna anger att de aldrig ger sina elever läxor i matematik och i samma storleksordning cirka åtta procent är de lärare som anger att deras elever får läxa vid varje eller nästan varje lektionstillfälle.

I tabell 7 fås ytterligare information om den del av lärares arbete som sker i klassrummen. Bland annat kommenteras det i Skolverket (2004b) att det verkar som att eleverna arbetade mer i grupp och övade rena räknefärdigheter mer vid Timss 1995. Det bör noteras att enkätfrågorna inte var identiska vid dessa två undersökningar. I en jämförelse mellan lärarnas och elevernas enkätsvar framkom att deras svar inte överensstämmer lika bra för alla påståenden i tabell 7. Det stämmer ganska väl för påståendet om att förklara sina svar, men enligt eleverna så sysslar det inte så mycket med att koppla det de gör i matematik till sin vardag, som lärarna anger. Mer än halva elevgruppen angav också att de aldrig arbetar i smågrupper på lektionerna. Jämför man med länderna i 20-gruppen så anger de svenska lärarnas att eleverna tecknar ekvationer och funktioner för att beskriva samband i lägre grad än de andra länderna.

Prov

Tillsammans med eleverna i Skottland har svenska elever förhållandevis få prov i matematik jämfört med 20-landsgenomsnittet. Enligt lärarsvaren har de flesta elever prov bara några gånger per år medan 44 procent av eleverna i 20-landsgruppen har prov åtminstone varannan vecka eller oftare. En skillnad mellan de svenska lärarnas prov och flertalet andra länder är svarsformen på provuppgifterna. Fem procent av eleverna i Sverige får prov med färdiga svarsalternativ medan 11 procent i 20-landsgruppen. Åttiofyra procent av provuppgifterna skall i Sverige redovisas med egna svar och lösningar medan motsvarande uppgift för 20-landsgruppen är 72 procent.

När det gäller innehållet i provuppgifterna anger de svenska lärarna att det är vanligare att matematiska procedurer testas än att eleverna testas på uppgifter där mönster eller samband ska sökas. Detta förhållande bekräftas också i Boesen (2006), som dock studerat gymnasielärares prov.

Tabell 7: Andel svenska elever vars lärare gett ett visst svar på frågan ”Hur ofta ber du eleverna i Timss–gruppen att göra följande när du undervisar dem i matematik?”.

Läraren ber eleven att ...	Lektioner			
	Varje	Hälften	Vissa	Aldrig
Förklara sina svar	33%	27%	39%	1%
Själva bestämma hur de ska gå tillväga för att lösa komplexa problem	25%	28%	45%	2%
Träna addition, subtraktion, multiplikation och division utan miniräknare	28%	15%	47%	-
Koppla det de lär sig i matematik till sin vardag	12%	18%	59%	1%
Arbeta med bråk och decimaltal	7%	18%	75%	-
Arbeta med problem vars lösnings-metoder inte är omedelbart uppenbara	8%	16%	72%	4%
Arbeta tillsammans i små grupper	12%	11%	64%	13%
Tolka tabeller, diagram eller kurvor	6%	-	93%	1%
Teckna ekvationer och funktioner för att beskriva samband	2%	4%	85%	9%

4.4 Lusten att lära 2001-2002

Mycket av det som vi tidigare rapporterat bekräftas av Lusten att lära, eller snarare om vi tar det kronologiskt, det som rapporterats från Lusten att lära bekräftas av det som rapporteras från den Nationella utvärderingen 2003 och Timss 2003. Eftersom framställan hittills uteslutande behandlat grundskolan, väljer vi att från Lusten att lära granskningen fokusera det som rör gymnasieskolan i det följande avsnittet.

En sammanfattning av det innehåll i expertrapporterna som relaterar till gymnasieskolan[13]
I den sammanfattande rapporten med fokus på matematik (Skolverket, 2003) behandlas gymnasiet men inte speciellt utförligt. De flesta observationer och förslag är också av mer allmän karaktär. Studerar man i stället de underliggande expertrapporterna med avseende på gymnasieskolan finner man dock att de allmänna slutsatserna mycket väl stämmer in även för gymnasieskolan. De sammanfattningar och förslag som finns på sidan 54 i rapporten och de sammanfattande kommentarerna för gymnasiet som följer nedan är alltså i huvudsak mycket lika. Vi börjar med ett elevcitat.

> I religionskunskap där får man tänka utifrån sig själv, i språk får man konversera med varandra, i idrott får man röra på sig, i So får man veta en massa viktiga saker om hur det ser ut i världen, i No får man intressanta aha-upplevelser, men i matematik där sitter man bara med en massa tal.
> *Elev på NV med tolv års erfarenhet från skolan*

Faktorer som främjar lusten att lära
Elever på gymnasiet påpekar ofta att i matematik är läraren den kanske viktigaste faktorn för lusten att lära, kanske viktigare än i något annat ämne. Läraren skall vara entusiastisk, ha kunnande i ämnet och framför allt, menar eleverna, kunna förklara på olika sätt och sätta sig in i olika elevers sätt att tänka. Att undervisningen i allmänhet och de problem som skall lösas i synnerhet hamnar på rätt nivå för den enskilde eleven nämns också som en viktig faktor. Eleverna menar genomgående att det är när man förstår som lusten att lära väcks. Både lärare och elever påpekar också att det som är

[13]Innehållet i detta avsnitt bygger huvudsakligen på en opublicerad sammanställning av Ola Helenius, NCM, som gjordes i samband med Matematikdelegationen. Ursprungstexten finns tillgänglig via:
http://www.ncm.gu.se/media/mattebron/Referenser/LustenHelenius.pdf

föremål för undervisning bör uppfattas som nyttigt av eleverna.[14] De vill se vad matematiken kan användas till eller vad den leder till. Det är viktigt att stoffet som presenteras sätts in i ett sammanhang och man vill se en röd tråd genom undervisningen.

Vidare uppfattas variation med avseende på den typ av undervisning som bedrivs som främjande för lusten att lära. Genomgångar och enskilt arbete bör varvas med laborationer, problemlösning, projekt och grupparbeten.

Elevernas situation
Många elever säger sig vara nöjda med matematikundervisningen och ett av argumenten är att de inte tror att det går att göra på något annat sätt. Samtidigt tycker många att undervisningen är enformig och ser inte varför de skall lära sig matematik. Vissa elever menar att det måste finnas något annat sätt att lära sig än att räkna i boken. Från en del gymnasieskolor rapporteras det att det finns en slags matematisk gruppering, att elever på yrkesprogrammen känner sig mindre värda och också behandlas på det sättet av lärarna. Några elever säger även att detta är naturligt, att lärarna inte kan förväntas lägga lika mycket energi på elever som inte vill lära sig matematik. Omvänt utrycks också från elever på NV att de trivs med att vara i en duktig grupp elever och gärna identifierar sig med denna grupp. Samtidigt talas det också om en stor betygshets, speciellt på NV. Denna hets leder ibland till att man undviker svåra kurser tillförmån för enkla, där ett högt betyg är enkelt att få.

På flera ställen i rapporterna utrycker NV elever att de vill bli utmanade i matematiken. När det gäller flykting/invandrarelever lägger en inspektör fram förslaget att dessa ibland borde slussas in snabbare i matematiken än i andra ämnen. Bland vissa grupper av flyktingar/invandrare är matematikkunnandet mycket högt och detta borde tas tillvara för att stärka deras självförtroende.

Den typiska undervisningssituationen
En mycket stor del av undervisningen på gymnasiet går till enligt följande modell: Läraren har en kort genomgång och eleverna räknar sedan enskilt i boken medan läraren går runt och hjälper till. I vissa fall är genomgångarna fler eller längre. Detta gäller främts på NV- programmet. Endast mycket sällan skapas genuina diskussioner om problem eller begrepp. Givetvis finns det undantag från detta. Det kan då till exempel handla om projektarbeten,

[14]Troligen är begreppet relevant bättre än begreppen nyttigt och användbart. Någonting hos den enskilde eleven, undervisningssituationen eller begreppet som undervisas kan skapa en känsla av relevans hos eleven trots att nyttoaspekter saknas. Omvänt behöver inte allt som är nyttigt kännas relevant.

problemlösning i grupp eller samarbete med andra ämnen. Det förhärskande upplägget av undervisningen gör boken mycket central.

När lärarna uppmanas förklara målet med sin undervisning är svaren ganska skilda. En del ser som det operativa målet att gå igenom allt undervisningsinnehåll för att eleverna skall klara betygskrav och nationella prov, men även att få med sig matematik för vardagen och för att förbättra sitt logiska tänkande. Andra lärare ser det mer som sitt mål att väcka elevernas nyfikenhet och ge dem riktig förståelse av grunderna i matematiken.

Nivågruppering används relativt sparsamt enligt rapporterna. I de fall det används upplever inspektörerna det ofta som en ganska problematisk modell, något som stöds av kunskapsöversikten "Elevgrupperingar. En kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisning" (Wallby m.fl., 2001).

Innehållet

Det sägs inte mycket i rapporterna om själva ämnesinnehållet. Det som tas upp mest är att innehållet i hög grad bör anknyta till verkligheten. I mer specifika termer ses det som mycket viktigt att matematiken anknyter till de tillämpningar som finns inom de respektive utbildningsprogrammen. Matematiken på NV-programmet anses svår att direkt anknyta till verkligheten, men är å andra sidan lättare att anknyta till viktiga karaktärsämnen inom programmet. Detta syns också i böckerna för NV, hävdar lärarna. Uppgifterna i böckerna för många andra program är oftast mer kontextlösa. Möjligen anses sådana uppgifter lättare, vilket en del lärare betvivlar.

När det gäller samarbete mellan karaktärsämnena och matematiken på gymnasiets yrkesprogram verkar det i allmänhet inte finnas någon bra struktur för detta. Den typiska situationen är att det fungerar bra på något av programmen, men inte på de andra. En möjlig tolkning av detta fenomen är att den här typen av samarbete är mycket personberoende. I de fall på yrkesprogrammen där verklig anknytning till yrkesområdet saknas påtalas detta ofta som ett problem. I de fall en sådan anknytning framträder tydligt påpekar lärarna att elevernas lust att lära kan vara starkare än lusten hos många teoretiskt inriktade elevgrupper. Detta trots att de yrkesinriktade eleverna kan ha större svårigheter med matematiken. Lärarna anser att det i allmänhet är allra svårast att hitta beröringsområden mellan matematiken och karaktärsämnena på samhällsprogrammen.

Utveckling och hinder för utveckling

Många lärare har tankar om utveckling av sin undervisning, men anser att tidspress relativt stoffmängden hindrar sådan utveckling. Även förkunskaperna är problematiska och kanske än mer spridningen i förkunskaper. Tiden har blivit än mer problematisk när antalet timmar per kurs minskar (ej

längre styrt av staten). Att grupperna är för stora framförs också mycket ofta som ett hinder för utveckling av undervisningen. Många lärare utrycker att de vill utveckla innehållet så att det blir mer inriktat mot strävansmålen, men de är osäkra på hur stort friutrymmet är för utveckling. De är också osäkra på om en sådan förändring i praktiken skulle vara bättre för de elever de har. Det utrycks också tveksamhet mot relationen mellan läroplanerna och kursplanerna. Medan läroplanerna talar om problembaserad och verklighetsanknuten undervisning så upplevs eller uppfattas kursplanerna mest ha innehållsmål.

En stor andel av de citerade lärarna i expertrapporterna påpekar vikten av att A-kursen måste anknytas till respektive program. De menar dock att det faktum att Nationella proven inte har en sådan inriktning i praktiken hindrar en sådan anknytning.

5 En heterogen samling forskningsstudier

5.1 Kategorisering av litteraturen

Vid kategoriseringen av de 229 arbeten som bedömdes ha relevans för uppdraget (i många fall mycket perifert) erhölls ett resultat som redovisas i tabell 8. Relevansnivåerna är skapade för att avgöra i vilken utsträckning olika arbeten är centrala för vårt uppdrag, det är då intressant att det är så stor andel (67 procent) arbeten som fokuserar på olika aspekter av elevers lärande och att endast 12 procent hör till översiktens huvudfokus.

Av de 229 arbeten som klassificerats behandlar omkring 3/5 grundskolan. En fjärdedel behandlar gymnasieskolan och resten universitets- eller lärarutbildning. Detta bidrar ytterligare till att vi har ett mycket begränsat underlag för att dra slutsatser om lärares arbete i gymnasieskolan. Samtidigt är det viktigt att påpeka att många resultat från studier på grundskolan har bäring för undervisning i gymnasieskolan och omvänt.

Från tabellen ser vi att forskning om problemlösning och matematiska resonemang utgör den största inriktningen i Sverige. Dock är det viktigt att påpeka att kategoriseringen ger en förenklad bild av underlaget, många avhandlingar och artiklar kan hänföras till mer än en kategori. Principen har dock varit att endast placera varje arbete inom en kategori. I den vidare ana-

Tabell 8: Antal arbeten per kategori och relevansnivå

	R1	R2	R3	Totalt
A Problemlösning	6	55	18	79
B Genusfrågor	0	20	0	20
C Kommunikation	2	17	2	21
D Attityder	0	2	0	2
E Vardagsanknytning	2	0	4	6
F Begreppsbildning	4	19	12	35
G Elevgrupperingar	5	11	5	21
H Prov och bedömning	3	15	4	22
I Tekniska hjälpmedel	4	7	2	13
J Specialpedagogik	1	7	2	10
Summa	27	153	49	229
Procent	12	67	21	100

lysen av underlaget har vi genom att enbart ta med två typer av publikationer, dels artiklar som är publicerade i forskningstidskrifter och dels avhand-

lingar gjort ytterligare begränsningar. Denna avgränsning baseras förutom på rådet från referensgruppen också på den uppdelning av forskning som Vetenskapsrådet[15] gör när de granskar forskningsansökningar. Den viktigaste kategorin där är 'referee-bedömda artiklar', det vill säga artiklar i forskningstidskrifter. Detta följer också den gängse akademiska traditionen när det gäller vilka publikationer som tillskrivs störst vikt.

Om problemlösning är den mest frekventa kategorin så är forskning om attityder den minst frekventa. Endast två arbeten har placerats här, något som står i stark kontrast mot den internationella forskningen där detta område är stort, även om det tycks ha minskat något i popularitet de senaste åren (Lester och NCTM, 2007). Två områden är betydligt vanligare utanför de underlag vi i det följande tar upp (till exempel bland konferensbidrag och institutionsrapporter), det rör dels genusfrågor och dels frågor om vardagsanknytning och vardagsmatematik. Genusfrågor är representerade med 20 arbeten i tabellen, men i stort sett återfinns inget arbete bland de publicerade artiklarna eller avhandlingarna.

En första bedömning är att vi har ett mycket begränsat underlag när det kommer till huvudfrågan. Det faktum att endast 27 arbeten fokuserar på relevansnivå ett innebär att det är svårt att dra några egentliga slutsatser om hur lärare arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper.

5.2 Forskningsartiklarna

Det finns förhållandevis lite svensk forskning som berör uppdraget. Mindre än 40 forskningsartiklar i internationella tidskrifter och 34 avhandlingar har kategoriserats att höra till relevansnivå ett och två, varav endast en handfull av dessa hör till relevansnivå ett. Utöver dessa finns ett stort antal lokala institutionsrapporter och konferensrapporter som vi alltså inte behandlar. I detta avsnitt beskrivs ett urval av de publicerade forskningsartiklarna. En fullständig förteckning över de publicerade artiklar som kategoriserats till relevansnivå ett och två finns i bilaga A.

Den kategorisering som presenterades i avsnitt 3.4 var väl avpassad för att behandla det stora materialet med över 200 arbeten och för att möjliggöra jämförelser med internationell forskning. För de forskningsartiklar och avhandlingar som hör till relevansnivå ett och två visar sig kategoriseringen vara både för omfattande och också för detaljerad för att på ett bra sätt beskriva materialet. Arbeten på relevansnivå ett är så få att en uppdelning i olika kategorier inte är meningsfull. När det gäller arbeten på relevansnivå två beskriver vi resultaten i form av ett antal teman som framträder vid ana-

[15] se www.vr.se

lys av underlaget. Dessa teman kan enklast beskrivas som sammanslagningar av de viktigaste kategorierna eller grupperingar av kategorier som diskuterades i avsnitt 3.4. Här kan man notera att det inte är samma områden som framträder som i det större materialet. Det ger också en indikation på att svensk matematikdidaktisk forskning är tämligen heterogen. Följande tre teman framträder:

- Matematiska resonemang, problemlösning och algoritmer
- Kommunikation, språk och läroböcker
- Prov och bedömning

Exempel på artiklar inom varje tema ges också, dock presenteras inte alla publicerade rapporter inom området.

5.2.1 Relevansnivå ett: Lärares arbete i klassrummet

Svensk forskning som har lärarens arbete i klassrummet som sitt huvudsakliga fokus är sparsamt förekommande i internationella forskningstidskrifter. Vi har endast identifierat en handfull sådana i vårt arbete. De som finns bekräftar uppfattningen att matematikundervisningen följer gamla traditioner och är relativt motståndskraftig mot förändringar. Ett exempel är Samuelsson (2006) där han visar att när datorn ska integreras i matematikundervisningen anpassas användandet till den undervisningstradition som finns, den förändrar inte klassrummet i någon märkbar utsträckning. Ett annat exempel är Runesson och Chee Mok (2005) som påvisar att den svenska undervisningen i stor utsträckning är sekventiell till skillnad från den asiatiska undervisningen som är mer flexibel och behandlar flera begrepp parallellt.

Många lärare i Sverige ser nivågruppering som ett bra sätt att kunna anpassa undervisningen till olika elevers förutsättningar. Det lärarna uttrycker i Nyströms studie (2003) är dock att de egentligen vill göra samma sak med alla elever men att i de svaga grupperna kan man inte ha så långa genomgångar. Möjligen skulle vissa lärare vilja låta några få elever i varje klass hålla på med mer avancerade resonemang (Bergqvist, 2005). Dock visar Bergqvist att betydligt fler elever än 'några få' skulle kunna delta i sådana aktiviteter.

Nedan presenteras ett antal studier som vi anser hör till relevansnivå 2 och som berör elevers förståelse och lärande. I viss mån kan vi också dra slutsatser om undervisningens utformning och lärares arbete utifrån dessa studier.

5.2.2 Relevansnivå två: Elevers förståelse och lärande

Elevers arbetssätt påverkas självklart av lärarens agerande. Därför kan studier av elever ge viss information om hur lärare arbetar för att utveckla elevernas matematikkunskaper. Här ser vi studier som fokuserar elevers förståelse eller olika aspekter av förståelse, till exempel hur elever förhåller sig till algoritmer av olika slag och andra studier har ett sociokulturellt perspektiv där analys av samarbete och kommunikation är centrala. Vi har också ett antal studier som har läroboken som forskningsobjekt, ofta med språket och läsning som en viktig aspekt.

Matematiska resonemang, problemlösning och algoritmer
Resultaten från studierna som behandlar elevers förståelse och användning av algoritmer berör en allvarlig problematik som bland annat innebär att eleverna i stor utsträckning försöker lära sig algoritmer utantill, algoritmer som de själva inte alltid anser att det är möjligt att förstå (Neuman, 1997; Hedrén, 2000; Bergqvist, Lithner, och Sumpter, 2007). Dessa studier pekar på behovet att minska fokuseringen på algoritmer till förmån för diskussioner, eget tänkande och kreativ argumentation. Ingen av studierna menar att algoritmer i sig är negativt för lärandet utan snarare att det i den rådande situationen råder en obalans mellan å ena sidan algoritmer och å andra sidan problemlösning och kreativitet. Risken som Neuman ser är att algoritmerna befäster det gap som finns mellan elevernas informella arbetssätt och de formella arbetsformer som är en av matematikens byggstenar. Bergqvist et al menar att ett fokus på imitativa resonemang är förståeligt och även i viss mån framgångsrikt i ett kort perspektiv, men att det uppstår svårigheter när eleven träffar på mer genuina problem.

Kommunikation, språk och läroböcker
Kommunikation är återkommande i många studier som en mycket viktig aspekt av elevernas lärmiljö. Wistedt och Martinsson (1996) visar att elever kan nå betydligt längre i sin förståelse av matematiska begrepp när de får möjlighet att samarbeta och argumentera för sina idéer. Vikten av språklig kompetens både allmänt och matematikspecifikt belyses av bland andra Wyndhamn och Säljö (1997) och Riesbeck (2006). En speciell typ av kommunikation gäller elevernas arbete i läroboken. I Sverige är individuellt arbete med läroboksuppgifter den i särklass vanligaste aktiviteten i matematikklassrummet (se avsnitt 4.2 - 4.4). Johansson (2005b) menar att läroboken underlättar lärares arbete samtidigt som den kan begränsa lärarens frihet och ansvar. Hon menar att det behövs en ökad medvetenhet om läroböcker, hur de används och hur de kan användas. Forskning riktad specifikt mot läs-

och skrivförmåga finns också. Johansson (2005a) påvisar en koppling mellan elevers förmåga att skriva siffror och deras prestationer inom aritmetik. Att generell läsförmåga är relaterat till matematikprestationer har påvisats exempelvis i PISA (Skolverket, 2001, 2004a). Österholm (2006a) går ett steg längre och visar att karaktären på den matematiska texten är avgörande och att kopplingen mellan generell läsförståelse och matematikprestationer endast gäller så länge texten inte innehåller specifika matematiksymboler i någon större utsträckning.

Prov och bedömning
Ett annat viktigt område när det gäller elevers lärande är forskning om prov och bedömning. Dessa är också i vissa fall av vikt för att förstå lärares arbete i klassrummet. Här finns publikationer där Westers och Henrikssons artikel från 2000 om uppgiftstypens påverkan på genusskillnader är ett exempel. Wester och Henriksson (2000) visar att genusskillnader i prestationer inte kan förklaras med hur uppgiften är utformad, dvs. om det rör sig om flervalsfrågor eller frågor med öppna svar. Kjellström och Pettersson (2005) beskriver det svenska systemet med nationella prov läraren som ensam bedömare och pekar på både fördelar och nackdelar. I studien påtalas att lärare generellt är nöjda med strukturen och innehållet i de nationella proven, de anser att proven ger ett gott stöd vid bedömning av elevernas prestationer. Författarna menar dock att processen tar mycket tid och att lärare behöver mer tid att diskutera prov och bedömning med sina kollegor. En annan aspekt av de nationella proven har analyserats av Palm och Burman (2005). De har jämfört med den finska studentexamen och visar att omkring hälften av alla uppgifter som är tänkt att vara verklighetsanknutna inte är det. Detta är ett problem om man vill att eleverna ska uppleva matematikundervisningen som realistisk.

5.3 Doktorsavhandlingarna

Det har skrivits ett sjuttiotal svenska avhandlingar i matematikdidaktik, där den första kom redan 1919, skriven av Karl Gustav Jonsson. Inte alls alla faller inom ramen för vårt uppdrag, vi menar att omkring hälften av alla avhandlingar har ett fokus som inte direkt berör hur lärare arbetar eller hur elever lär sig matematik. Som en följd av uppdragsbeskrivningen har vi inte heller behandlat avhandlingar som är mer än 20 år gamla.

Bland de 34 avhandlingar vi har tagit med i vår översikt har åtta ett förstahandsfokus på någon aspekt av lärares arbete i klassrummet. Dessa beskriver vi huvudsakligen var för sig, då det är svårt att ge en generell

bild av ett så litet antal arbeten. De övriga 26 fokuserar på elever, elevers förutsättningar och elevers lärande. Dessa presenterar vi med hjälp av samma teman som i avsnitt 5.2.2. En förteckning över de 34 avhandlingarna finns i bilaga B.

5.3.1 Relevansnivå 1: Lärares arbete i klassrummet

Mycket centrala för den övergripande frågeställningen är två avhandlingar som behandlar hur lärare beter sig i sitt arbete med elever och där det matematiska innehållet intar en central roll i studien. Runesson (1999) studerar hur fem lärare behandlar det matematiska innehållet när de undervisar om bråk och procent och Häggström (2008) jämför hur svenska och kinesiska lärare hanterar linjära ekvationssystem i sin undervisning. Häggströms resultat visar att lärare kan hantera samma matematiska undervisningsinnehåll på skilda sätt, och därmed ges eleverna olika möjligheter att lära och förstå. En central term i detta sammanhang är variation. Genom att variera centrala aspekter av det matematiska innehållet öppnas möjligheter för lärande. Läraren måste vara medveten om dessa olika aspekter för att variationen ska bli möjlig. Ibland kan innehållet vara så välkänt för läraren att det riskeras att tas för givet. De kinesiska lärarna använde på ett medvetet sätt systematiskt variation i sin undervisning.

Ett av de teman som kom fram i analysen av de arbeten som ingår i denna översikt är *Kommunikation*. Detta tema finns också representerat av tre stycken avhandlingar med lärarfokus. Emanuelsson (2001b) undersökte hur lärare kan få kunskap om elevernas lärande, Löwing (2004) analyserade hur lärare organiserar sin undervisning och hur de kommunicerar det matematiska innehållet till eleverna och Engström (2006) studerade tre lärares arbete med dynamisk geometri i sin undervisning. Kommunikationen mellan elever och lärare är centralt i alla tre avhandlingarna.

Emanuelsson (2001b) visar att lärarens formulering av sina frågor till eleverna har avgörande betydelse för om och hur elevernas tankar kring undervisningsinnehållet blir synliga och därmed kan utgöra underlag för vidare diskussion. Frågor som ger eleverna möjlighet att uttrycka olika sätt att tänka kring innehållet har en större potential än enkla frågor som endast kan besvaras med ett svar som är antingen rätt eller fel. Utifrån de olika svar eleverna ger får läraren mer kunskap om elevernas förståelse än bara om de kan eller inte. Med ett exempel från huvudräkning: En elev besvarar frågan ”vad är 56+13” med 69, vilket också sätter punkt på diskussionen. Svaret är antingen rätt eller fel, och hur eleven tänker när svaret blir rätt är oftast ointressant. Frågan: Vilka additioner ger svaret 69? ger möjlighet för elever att avslöja både bredd i kunskaper och eventuella missuppfattningar. Även tankar som

leder till korrekta svar kan därmed bli intressanta och föremål för reflektion.

Löwing (2004) identifierade brister i lärares språk och lyfter fram deras fokus på hur *man gör* och inte på *hur man förstår*. På en övergripande nivå visade det sig att lärarna i stor utsträckning lät eleverna arbeta i egen takt något som i princip omöjliggör gemensamma diskussioner och genomgångar. Vid detaljstudie av den förekommande kommunikationen lärare-elev identifierades både språkliga och matematiska otydligheter. Slutsatsen är att det inte räcker med goda ämneskunskaper för att undervisa, utan att man även behöver det som fångas i det svåröversatta begreppet 'pedagogical content knowledge' se exempelvis Ball och Bass (2000).

Engström (2006) visade att lärarens förmåga att ställa utmanande frågor är mycket viktig eftersom den på ett avgörande sätt påverkar vad eleverna lär sig. För att kunna göra detta i samband med den dynamiska programvaran som användes i försöket behöver lärarna både en god matematisk grund och en förståelse för programvarans potential.

De tre återstående avhandlingarna är av olika karaktär. Bentley (2003) studerade hur lärares undervisning påverkas av ramfaktorer av olika slag, till exempel antal elever, egen ämneskunskap, erfarenhet och ekonomiska ramar. Ramfaktorernas påverkan relaterades till ett antal olika undervisningsstilar, exempelvis genomgång i helklass, grupperingar inom klassen och individualiserad undervisning (samtliga stilar finns i flera versioner). Resultaten indikerar en variation i undervisning beroende på vilken undervisningsstil läraren använder, men även att ramfaktorer ger en variation inom varje stil.

Samuelsson (2003) bearbetar frågan i vilken utsträckning datorn påverkar matematiklärares praktik. Resultaten indikerar att datorn införlivas i existerande rutiner på grund av den mycket stabila undervisningstradition som dominerar skolmatematiken. Samuelsson visar också att datorn som förändringsagent kan påverka elevers uppfattningar om matematik positivt.

Boesen (2006) behandlar hur de prov som matematiklärare på gymnasiet ger sina elever ser ut, vilka matematiska kompetenser testas, vilken typ av matematiska resonemang krävs av eleverna för att de skall kunna lösa uppgifterna på proven? Lärarnas prov jämförs med de nationella proven och lärarproven fokuserar i mycket hög grad det som i avhandlingen betecknas som imitativa matematiska resonemang, en sorts procedurfokus, medan de nationella proven har en jämnare fördelning av uppgifter som testar flera olika matematiska kompetenser (se sidan 12).

5.3.2 Relevansnivå 2: Elevers förståelse och lärande

Matematiska resonemang, problemlösning och algoritmer
Det finns relativt många avhandlingar inom detta område. Den samlade bilden av dessa avhandlingar pekar på en trivialisering av matematikundervisningen med ett fokus på algoritmer och tekniker, men också på de möjligheter för lärande som erbjuds genom arbete med problemlösning och medveten presentation av matematiska objekt.

Pettersson (1990) analyserade i en mycket stor studie 9000 elevers kunskapsutveckling när det gäller problemlösning. Analysen visar att lågpresterande elever ofta gör allvarliga fel beroende på att de inte förstår vad uppgiften går ut på, medan högpresterande elever gör olika typer av slarvfel. Resultaten indikerar att matematikundervisningen fokuserar på teknikträning på bekostnad av problemlösning.

Wyndhamn (1993) studerade problemlösning ur flera perspektiv för att ta reda på vad som påverkar elevers framgång. Flera olika delförsök pekar på en mängd olika aspekter som eleverna tar in i processen. Olika förutsättningar verkar gälla om problemlösning sker i matematikklassrummet eller i ett annat sammanhang och eleverna påverkas tydligt i sitt arbete av dessa förutsättningar. Ett känt exempel är en uppgift där elever med hjälp av en portotabell skulle ta reda på hur mycket det kostade att skicka brev, något som gick utmärkt under lektionen i samhällskunskap men inte lika bra under matematiklektionen då eleverna använde linjära matematiska modeller även om postens prissystem inte är linjärt.

Bergqvist (2001) visade att en grupp elevers förmåga till abstrakta resonemang var högre än vad lärarna trodde. Det kan medföra att lärarna inte utmanar eleverna tillräckligt och att elevernas potential underutnyttjas. Eleverna kan också utnyttja tekniska hjälpmedel för att förstå matematik i relativt hög grad.

Olteanu (2007) visar på vikten av att eleverna har en förståelse för komponenterna i andragradsfunktioner och andragradsekvationer för att de ska kunna urskilja vilka parametrar som är viktiga för en korrekt behandling av lärobjektet. Lärobjekten är i det här fallet andragradsfunktioner och andragradsekvationer i gymnasieskolan och i studien identifieras mönster dels i framställningen av dessa lärobjekt (både lärarens och lärobokens), och dels i elevernas erfarande av objekten. Genom att analysera vilka aspekter eleverna urskiljer kan varianter av undervisning som i större utsträckning leder till att eleverna förstår innehållet identifieras. Studien pekar på att en undervisning där man fokuserar på en aspekt av ett lärobjekt och sedan visar på konvergenta variationer (olika exempel som illustrerar samma aspekt) av objektet har större förutsättningar att utveckla elevernas förståelse.

Kommunikation, språk och läroböcker

Kommunikationens centrala roll i elevers matematiklärande betonas i många avhandlingar. En medvetenhet om vad som kommuniceras och hur det kommuniceras är mycket viktig i lärares arbete i klassrummet. De tre avhandlingar som presenteras här belyser var sin aspekt av detta.

Johansson (2006) diskuterar lärobokens roll i matematikundervisningen, utifrån rapporter om lärobokens starka ställning och styrande funktion. I en fallstudie har hon undersökt hur läroboken faktiskt används. Det visade sig att i de undersökta klasserna användes läroboken under en mycket stor del av lektionerna och även när läraren presenterade exempel och genomgångar hade dessa ofta sitt ursprung i läroboken. Författaren menar att en slentrianmässig användning av läroböcker kan skapa begränsningar i undervisningen, men att läroböcker ändå är viktiga, då de underlättar lärarens arbete och kan ge struktur som stöd för eleverna. Att följa en lärobok innebär dock inte med säkerhet att kursplan och läroplan följs.

Österholm (2006b) visar att generell läsförmåga används för att läsa matematiska texter i stor utsträckning så länge den matematiska texten inte innehåller symboler. Om texten däremot innehåller symboler tycks eleverna använda en annan lässtrategi, där symboler och nyckelord fokuseras. Förståelsen av texten blir då sämre. Författarens slutsats är att elever behöver få undervisning i läsning av matematisk text.

Riesbeck (2008) analyserade samtal mellan elever och lärare i en problemlösningssituation. I avhandlingen påvisas vikten av ett specifikt och tydligt språk i samtalet, som en grund för förståelse och ömsesidigt lärande, både i diskussion mellan elever och mellan elever och lärare. Författaren betonar särskilt att elever måste observeras på och få hjälp med övergångarna mellan den vardagliga och den matematiska diskursen.

Prov och bedömning

Forskning om prov och bedömning är ett mycket stort fält i ett internationellt perspektiv, framför allt under 1990-talet. De svenska avhandlingar som behandlar detta område påtalar bland annat hur viktiga prov är för elevernas lärande och för elevernas inställning till matematik och vad som är matematik. De två avhandlingar som presenteras här har båda givit ett teoretiskt bidrag till hur vi kan förstå aspekter av prov och bedömning i skolan.

Palm (2002) visar i sin avhandling att elever i mellanstadiet har en tendens att utesluta sin egen kunskap om vardagen när de löser matematiska provuppgifter. Orsakerna till detta är enligt författaren dels elevernas inställning till matematik, till exempel att matematikuppgifter alltid har ett entydigt svar, och dels användandet av ytliga lösningsstrategier. Palm ut-

vecklar också ett ramverk för att analysera i vilken utsträckning matematikuppgifter upplevs som verklighetsnära av elever.

Nyström (2004) behandlar validitetsbegreppet vid provkonstruktion och analys av resultat från olika typer av prov. Han bygger en teoretisk grund för värdering av kvalitet i samband med bedömningar i skolan. Olika aspekter av validitet kan enligt författaren i vissa sammanhang motverka varandra och ett resultat från avhandlingen är hur detta kan påvisas.

6 Diskussion

Inledningsvis vill vi ta upp ett par intryck vi fått under arbetets gång och som inte direkt lyfts fram i texten. Det första rör det faktum att det faktiskt skrivits en hel del som på olika sätt kan relateras till svensk matematikundervisning. Värt att notera är inte minst att den första sökningsomgången resulterade i över 800 texter, ett antal som förvisso reducerades ned till runt 600 för det i uppdraget specificerade skolstadierna. Detta står dock i stark kontrast till att det endast kvarstår 27 arbeten med vetenskaplig förankring och då det gäller artiklar publicerade i forskningstidskrifter endast ett fåtal, som *tydligt* går att knyta till ursprungsfrågan. Det är anmärkningsvärt.

En första fråga som väcks kring att det finns så få arbeten som går att knyta till huvudfrågan är om våra begränsningar i realiteten varit för starka, har vi reducerat komplexiteten alltför mycket? Vi menar att vi inte har gjort det, men att resultatet troligen skulle ha sett annorlunda ut om vi dels inkluderat exempelvis konferensrapporter och rapporter i olika institutionsserier eller andra textunderlag, eller om vi skulle vidgat arbetet till att inkludera andra delar av lärares arbete eller ännu mer elevspecifika frågor. Samtidigt skulle en sådan inkludering lett till en rad svårbemästrade problem bland annat rörande olika studiers kvalitet. Syftet med översikten är ju att ge en bild av vad vi vet utifrån forskning, inte att ge en bild av alla som på något sätt intresserat sig för området, eller vad som gjorts i Sverige i allmänhet. Därför är det viktigt med kvalitetskriterier och den avgränsning vi gjort. Som vi ser det är de begränsningar vi gjort bra, inte minst för att de gör att vi nu har en betydligt bättre bild om vad vi faktiskt vet – *och i realiteten inte vet* – om hur svenska matematiklärare arbetar. Våra resultat stämmer också väl överens med de resultat både Björkqvist (2003) och Strässer och Vetenskapsrådet (2005) kom fram till i sina läges- respektive forskningsöversikter om matematikdidaktiken i Sverige.

Innan vi går vidare tar vi kort upp ytterligare några av de intryck vi fått från det bortrensade materialet. Det kan nämnas att det fanns en relativt stor grupp texter som rörde utomhusmatematik. Som vi nämnt tidigare så återfanns det också en hel del arbeten om genusfrågor och verklighetsanknytning men också en hel del texter om attityder som inte på motsvarande sätt återspeglas i vår sammanställning.

6.1 Vad säger underlaget sammantaget?

Den allra enklaste sammanfattningen är att vi i realiteten vet mycket lite om hur matematiklärare arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper. Det är vårt huvudresultat. Vi upprepar vår preliminära slutsats från sidan 36:

> En första bedömning är att vi har ett mycket begränsat underlag när det kommer till huvudfrågan. Det faktum att endast 27 arbeten fokuserar på relevansnivå ett innebär att det är svårt att dra några egentliga slutsatser om hur lärare arbetar för att utveckla elevers matematikkunskaper.

Detta gäller i högsta grad för gymnasieskolan, där vi faktiskt bara har översiktlig information från Lusten att lära-granskningen och endast en fjärdedel av forskningsbidragen. Ur dessa underlag kan vi inte dra några slutsatser om att det finns eller inte finns några specifika skillnaden mellan skolformerna. Samtidigt så förefaller det när det gäller de stora dragen inte vara några större skillnader mellan grundskolan och gymnasieskolan. De huvuddrag som rapporterats i avsnitt 4.1 - 4.4 sammanfattas i följande fyra punkter:

- Läromedlens starka ställning.
- Det enskilda arbetet med eller utan lärarens handledning dominerar.
- Procedur- och/eller algoritmfokus.
- Få tillfällen till gemensam reflektion eller gemensamma diskussioner.

Dessa stora drag kan både kontrasteras mot och kompletteras med det som sammanfattas ur forskningsartiklarna och avhandlingarna. En viktig distinktion innan vi går vidare är skillnaden mellan resultat som rör vad vi vet om *hur lärare arbetar* och vad vi vet om *hur lärare borde arbeta*. En förenkling ger att de fyra punkterna ovan är vad vi vet, medan sammanfattningen av forskningsbidragen mer rör olika aspekter av om hur lärare borde arbeta. Därmed inte sagt att enskilda arbete är formulerade så att de säger hur lärare skall arbeta, men eftersom de oftast är av fallstudiekaraktär och inte sällan påvisar brister, så blir följden att de sammantaget säger mer om hur lärare borde arbeta än om hur lärare faktiskt arbetar.

Det vi vet om hur lärare borde arbeta är som sagt nästan uteslutande resultat som bygger på studier av enskilda lärare eller mindre grupper av lärare eller elever. Det innebär att den kunskap vi har rör karaktären på en del olika fenomen, men mycket sällan något om hur utbredda dessa är. Huvuddragen har i avsnitten 5.2-5.3 presenterats inom tre olika teman.

- Matematiska resonemang, problemlösning och algoritmer
- Kommunikation, språk och läroböcker
- Prov och bedömning

Försök att sammanfatta dessa mer än vad vi redan gjort tidigare riskerar att trivialisera resultaten, men vi vågar ändå påstå att de bland annat lyfter fram att det procedur- eller algoritmfokus som tycks vara utbrett också bär med sig en följd nackdelar för elevers förutsättningarna att lära. Vikten av god kommunikation i klassrummet lyfts också fram på flera olika sätt som förutsättning för att ge elever goda möjligheter att lära.

Före vi avslutar med att skissartat ge några korta svar till de i uppdraget förslagna underfrågorna rundar vi av med att presentera ett förhållandevis långt citat från Niss (2007). I det avslutande kapitlet i Lester och NCTM (2007) ger Mogens Niss sin bild av och sammanfattar det internationella forskningsläget rörande lärares arbete som följer:

> There was a time, not so long ago, when the prevalent conception of teachers of mathematics could be condensed – and caricatured – as follows. A teacher of mathematics is a person who knows some mathematics, i.e. some concepts, facts, results, rules, methods and procedures, on the one hand, and who knows how to teach students, in general terms on the other hand. Thus the competencies a mathematics teacher should possess were of two kinds, subject matter knowledge, and general pedagogical skills. Satisfactory and efficient teaching was expected to flow from the happy mating of these two kinds of competencies.
>
> Today we know much better. We know that general pedagogy – or education – should not be kept separate from subject matter knowledge. We know that mathematical knowledge for teaching (see chapter by Hill, Sleep, Lewis, & Ball) is essential form of knowledge that is not identical to knowledge of mathematics as a theoretical edifice. We further know that teachers, in addition to possessing solid mathematical competencies, should also posess mathematics-specific "didactic competencies," such as "curriculum competency," "teaching competency," "uncovering of learning competency," "assessment competency," "collaboration comptency," and "professional development competency" (see Niss, 2004a). We know that teachers' beliefs and affects towards the nature and role of mathematics, mathematical activities, and the teaching and learning of mathematics, as well

> as towards students and their potentials for learning, are crucial elements in their luggage (see Philipp's chapter). And we know that although teachers' initial preparation does matter a lot for the ways in which they are initiated to their professional career, continual professional development focused on the teaching and learning of mathematics as an integrated entity, and the building of a professional identity in collaboration with different sorts of collegues–peers, mentors, researchers–are even more critical to the way and extent to which they can develop as teachers who can help students learn mathematics to the best of their capacities.
>
> An impressive amount of research over the last twenty years, on all aspects of teachers' pre-service preparation, in-service development, and professional identity, in several countries, has brought us to where we are today. Sfard (2005) even talks of the present era in mathematics education research as the "era of the teacher." Despite this progress, there are still many things that need to be done before we reach Utopia. For, there is no end to what it takes to be(come) a Utopian teacher, a fact that makes such a person more ideal than real. Against that background, it is important to identify the components that are particularly instrumental in the preparation and development of mathematics teachers, so as to reduce the infinite complexity of shaping the protagonists in the teaching and learning of mathematics. (Niss, 2007, sidan 1305)

6.2 Tretton kortsvar – Resultaten i relation till ursprungsfrågorna

Nedan listas de resultat vi har i förhållande till de i uppdraget föreslagna underfrågorna. Många av frågorna har i praktiken fallit utanför det vi behandlat. Vi försöker ändå ge någon form av kort svar eller kommentar till dem nedan:

Vad vet vi om:

innehållet i undervisningen
Mycket lite. Elevresultat från Timms indikerar att geometri och algebra är innehållsmoment som behandlas i mindre omfattning.

hur lärarna använder läromedel
I praktiken vet vi bara *att* lärare använder läroboken i hög utsträckning. Från

fallstudier vet vi hur ett fåtal lärare använder dem, se avsnitt 5.3.

hur matematikundervisningen går till och organiseras
Som vi rapporterat ovan så har läroboken en stark ställning och det finns ett utbrett enskilt arbete för eleverna. Det finns också indikationer på att lärarna låter elever arbeta mindre i grupp jämfört med Timss 1995 och den nationella utvärderingen 1992. Det finns även studier som visar på ett algoritmfokus och en begränsad variationsrikedom i hur lärandeobjektet behandlas, se avsnitt 5.2 och 5.3. En annan aspekt av detta är olika former för nivågrupperingar, där ett resultat är att undervisningen inom de olika grupperna tycks vara mer lika än skilda.

om läsförståelse och matematikkunskaper
Att generell läsförmåga är relaterat till matematikprestationer har påvisats exempelvis i PISA (Skolverket, 2001, 2004a). Fallstudier visar exempelvis att karaktären på den matematiska texten är avgörande och att kopplingen mellan generell läsförmåga och matematikprestationer endast gäller så länge texten inte innehåller specifika matematiksymboler i någon större utsträckning, se avsnitt 5.3.

hur lärare arbetar med progressionen i alla elevers kunskapsutveckling
Här vet vi mycket lite. En aspekt av detta, som sammanfaller med kommentaren ovan, är olika former för nivågrupperingar, där ett resultat är att undervisningen inom de olika grupperna tycks vara mer lika än skilda.

hur dokumentationen av kunskapsutveckling sker i skolan
Då det gäller prov vet vi om gymnasielärares prov att de, till skillnad från de nationella proven, mer ensidigt testar rutinfärdigheter och att eleverna i hög utsträckning kan klara de ingående uppgifterna utan kreativa resonemang. Svenska elever rapporteras också ha också betydligt färre prov än andra länder.

vad som gynnar elevernas måluppfyllelse
En generell kommentar är att det procedur- eller algoritmfokus som tycks vara utbrett också bär med sig en följd nackdelar för elevers förutsättningarna att lära. Vikten av god kommunikation i klassrummet lyfts också fram på flera olika sätt som förutsättning för att ge elever goda möjligheter att lära.

om det är någon skillnad i matematikundervisning med avseende på flickor och pojkar
Här vet vi i praktiken nästan ingenting som exklusivt rör svenska förhållanden.

om det är någon skillnad i undervisningen utifrån elevens sociala, etniska eller språkliga bakgrund
Här vet vi i praktiken nästan ingenting som exklusivt rör svenska förhållanden. Allmänt hänvisas till Rönnberg m.fl. (2001).

om undervisningen i matematik har ändrats under de senaste 10-15 åren
Mycket lite. Några indikationer om minskat grupparbete och ökat enskilt arbete för eleverna.

lärarnas förutsättningar (ramar)
Det här en en av underfrågorna som bedömts ligga utanför det som primärt behandlats i översikten. En kommentar kan vara att förändring i praxis gällande timplanereglering tycks resulterat i färre antal utlagda undervisningstimmar (Timms 2003).

om lärares formella kompetens har förändrats över tid
Se avsnitt 4.1.

och om möjligt i vad mån lärare tar del av forskningsresultat om kunskapsutveckling i matematik i den aktuella åldersgruppen
Det här en en av underfrågorna som ligger utanför det som behandlats i översikten. Vi vet dock att det finns ett förhållandevis stort antal kanaler för att föra ut information av denna typ, dels finns Nämnaren, biennalrörelsen, och Nomad dels finns NCM:s omfattande nyhetsrapportering, Skolporten, Myndigheten för Skolutveckling och Skolverkets nyhetsrapportering och som ett aktuellt exempel de lokala matematikutvecklarna, med mera.

Referenser

Alger, Susanne. Svenska skolans lärare och undervisning i matematik och no i ett internationellt perspektiv. några resultat från timss 2003. Teknisk rapport 32, BVM, 2007.

Almquist, Sigfrid. *Karl Petter Nordlund : minnesteckning*. Norstedt, Stockholm, 1919.

Ball, D. och Bass, H. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. I: Boaler, J., redaktör, *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, ss 83–104. Ablex Publishing, Westport, 2000.

Bentley, Per-Olof. *Mathematics teachers and their teaching : a survey study*. Göteborg studies in educational sciences, 191. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 2003.

Bergqvist, T., Lithner, J., och Sumpter, L. Reasoning characteristics in upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(1):1–12, 2007.

Bergqvist, Tomas. *To explore and verify in mathematics*. Doctoral thesis - University of Umeå, Department of Mathematics, 21. Univ., Umeå, 2001.

Bergqvist, Tomas. How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2):171 – 191, 2005.

Björkqvist, Ole. *Matematikdidaktiken i Sverige : en lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Kungl. Vetenskapsakademien, Stockholm, 2003.

Boesen, Jesper. *Assessing mathematical creativity : comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Doctoral thesis / Umeå University, Department of Mathematics, 2006:34. Department of Mathematics and Mathematical Statistics Umeå Univ., Umeå, 2006.

Cockburn, A. D. och Nardi, E. Proceedings of the 26th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education. I: Cockburn, A. D. och Nardi, E., redaktörer, *PME 26*, band 4, Norwich, 2002. School of Education and Professional Development, Univ. of East Anglia.

Emanuelsson, Göran. *Svårt att lära - lätt att undervisa? : om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000.* NCM-rapport, 2001:3. Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, Göteborg, 2001a.

Emanuelsson, Göran, Johansson, Bengt, och Lingefjärd, Thomas. *Matematikämnet i skolan i internationell belysning.* Rapport / Institutionen för ämnesdidaktik, Avdelningen för matematik, Göteborgs universitet, 1992:01. Göteborgs universitet, 1992.

Emanuelsson, Jonas. *En fråga om frågor : hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap.* Göteborg studies in educational sciences, 168. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 2001b.

Engström, Lil. *Möjligheter till lärande i matematik : lärares problemformuleringar och dynamisk programvara.* Studies in educational sciences, 81. HLS förlag : Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm, Stockholm, 2006.

Hedrén, R. Alternatives to standard algorithms. a study of three pupils during three and a half years. *NOMAD*, 8(1):35–60, 2000.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., och Ball, D. Loewenberg. Assessing teachers' mathematical knowledge: what knowledge matters and what evicence counts? I: Lester, Frank K. och NCTM, redaktörer, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, ss 111–155. Information Age Pub., Charlotte, NC, 2007.

Häggström, Johan. *Teaching systems of linear equations in Sweden and China : what is made possible to learn?* Göteborg studies in educational sciences, 262. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 2008.

Johansson, B. Numeral writing skill and elementary arithmetic mental calculations. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 49(1):3–25, 2005a.

Johansson, Bengt och Wistedt, Inger. Undervisning om tal och räkning - ett histostoriskt perspektiv. I: Emanuelsson, Göran, redaktör, *Tal och räkning. 1*, s 190 s. Studentlitteratur ; Utbildningsradion, Lund Stockholm, 1991.

Johansson, Monica. The mathematics textbook – from artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10(3-4):43–64, 2005b.

Johansson, Monica. *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective*. Doktorsavhandling, Luleå tekniska universitet/Matematik, 2006.

Jonsson, Karl Gustav. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*. Almqvist och Wiksell, Uppsala, 1919.

Kilpatrick, Martin, och Schifter. *A research companion to Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2003.

Kilpatrick, Jeremy, Swafford, Jane, och Findell, Bradford. *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press, Washington, D.C., 2001.

Kjellström, Katarina och Pettersson, Astrid. The curriculum's view of knowledge transferred to national tests in mathematics in sweden. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 37(4):308–316, 2005.

Kjellström, Katarina och Skolverket. *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003 : matematik årskurs 9*. Skolverket Prim-gruppen Lärarhögskolan i Stockholm Fritzes distributör, Stockholm, 2005.

Lester, Frank K. och NCTM. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Information Age Pub., Charlotte, NC, 2007.

Lidholt, Birgitta, Boström, Ann-Kristin, och MSU. *Lärares arbete : pedagogikforskare reflekterar utifrån olika perspektiv : en antologi från en konferens anordnad av Myndigheten för skolutveckling*. Forskning i fokus, 29. Myndigheten för skolutveckling : Liber distribution, Stockholm, 2006.

Loef Franke, M., Kazemi, E., och Battey, D. Understanding teaching and classroom practice in mathematics. I: Lester, Frank K. och NCTM, redaktörer, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, ss 225–256. Information Age Pub., Charlotte, NC, 2007.

Lundgren, Ulf P. *Frame factors and the teaching process : a contribution to curriculum theory and theory on teaching*. Göteborg studies in educational sciences, 8, Stockholm,, 1972.

Lundgren, Ulf P. Ramfaktorteori och praktisk utbildningsplanering. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 4(1):31–41, 1999.

Läroplanskommittén och Skolverket. *Bildning och kunskap : särtryck ur Läroplanskommitténs betänkande Skola för bildning (SOU 1992:94)*. Statens skolverk : Liber distribution, Stockholm, 1994.

Löwing, Madeleine. *Matematikundervisningens konkreta gestaltning : en studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Göteborg studies in educational sciences, 208. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 2004.

Matematikdelegationen. *Att lyfta matematiken : intresse, lärande, kompetens : betänkande*. Statens offentliga utredningar, 2004:97. Fritzes offentliga publikationer, Stockholm, 2004.

Mullis, Martin, Smith, Garden, Gregory, Gonzalez, Chrostowski, och O'Connor. TIMSS assessment frameworks and specifications 2003, September 2001.

NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

Neuman, D. Diagnoser i matematik år 2. varför - hur – vad ger resultatet? *NOMAD*, 5(1):33–58, 1997.

Niss, M. Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. *Third Mediterranean Conference on Mathematics Education*, ss 115–124, 2003.

Niss, M och Jensen, T H. Kompetencer og matematiklaering (competencies and mathematical learning). Uddannelsestyrelsens temahaefteserie nr. 18-2002, Undervisningsministeriet, 2002.

Niss, Mogens. Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning - from here to utopia. I: Lester, Frank K. och NCTM, redaktörer, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, ss 2 v. (xiv, 667, 25, 41 s. xiv s. , s. 669–1324, 25, 41 s.). Information Age Pub., Charlotte, NC, 2007.

Norrgren, Birgitta. *Skola för bildning (SOU 1992:94) : diskussionsunderlag för lärare inför övergången till en ny läroplan. D. 1, Kunskap och lärande*. [B. Norrgren], [Göteborg], 1993.

Nyström, P. Lika barn leka bäst? en explorativ studie av sex gymnasielärares syn på nivågruppering i matematik. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 8(4): 225–245, 2003.

Nyström, Peter. *Rätt mätt på prov: om validering av bedömningar i skolan.* Akademiska avhandlingar vid Pedagogiska institutionen, Umeå universitet, 71. Univ., Umeå, 2004.

OECD. *Measuring Student Knowledge and Skills – A new Framework for Assessment.* OECD, Programme for International Student Assessment (PISA), 1-104, Paris, France, 1999.

Olteanu, Constanta. *"Vad skulle x kunna vara?": andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande.* Doktorsavhandlingar i pedagogiskt arbete, 19. Umeå universitet] ; Institutionen för beteendevetenskap, Högskolan i Kristianstad [distributör], [Umeå Kristianstad, 2007.

Palm, T. och Burman, L. Reality in mathematics assessment. an analysis of task-reality concordance in finish and swedish national assessment. *NOMAD*, 9(3):1–33, 2005.

Palm, Torulf. *The realism of mathematical school tasks features and consequences.* Doctoral thesis / University of Umeå, Department of Mathematics, 24. Univ., Umeå, 2002.

Palm, Torulf, Eriksson, Ingela, Bergqvist, Ewa, Hellström, Timo, och Häggström, Carl-Magnus. *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion.* PM : pedagogiska mätningar, 199. Enheten för pedagogiska mätningar Umeå universitet, Umeå, 2004.

Pettersson, Astrid. *Att utvecklas i matematik : en studie av elever med olika prestationsutveckling.* Studies in education and psychology, 25. Almqvist och Wiksell International, Stockholm, 1990.

Pettersson, Astrid och Skolverket. *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Hur löser elever uppgifter i matematik? : en studie av hur högstadieelever löser matematikuppgifter enskilt och i grupp.* Skolverkets rapport, 61. Statens skolverk : Liber distribution, Stockholm, 1994.

Pólya, George. *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton U.P., Princeton, N.J., 1954.

Riesbeck, Eva. Det hänger på decimalen! om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld. *NOMAD*, 11(1):33–50, 2006.

Riesbeck, Eva. *På tal om matematik : matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen.* Linköping studies in behavioural science, 129.

Institutionen för beteendevetenskap och lärande, Linköpings universitet, Linköping, 2008.

Runesson, Ulla. *Variationens pedagogik : skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll = [The pedagogy of variation] : [different ways of handling mathematical topic].* Göteborg studies in educational sciences, 129. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 1999.

Runesson, Ulla och Chee Mok, Ida Ah. The teaching of fractions – a comparative study of a swedish and a hong kong classroom. *NOMAD*, 10(2): 1–15, 2005.

Rönnberg, Irene, Rönnberg, Lennart, och Skolverket, Sverige. *Minoritetselever och matematikutbildning : en litteraturöversikt.* Skolverkets monografiserie,. Statens skolverk, Stockholm, 2001.

Samuelsson, J. Ict as change agent of mathematics teaching in swedish secondary school. *Educucation and Information Technologies*, 11(1):71–81, 2006.

Samuelsson, Joakim. *Nytt, på nytt sätt? : en studie över datorn som förändringsagent av matematikundervisningens villkor, metoder och resultat i skolår 7-9.* Pedagogiska institutionen, Univ., Uppsala, 2003.

Schoenfeld, Alan H. *Mathematical problem solving.* Academic Press, Orlando, 1985.

Skemp, R. Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3):9–15, 1978.

Skolverket. *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik.* Statens skolverk : Liber distribution, Stockholm, 1997.

Skolverket. *TIMSS : kunskaper i matematik och naturvetenskap hos svenska elever i gymnasieskolans avgångsklasser.* Skolverkets rapport, 145. Statens skolverk : Liber distribution, Stockholm, 1998.

Skolverket. *PISA 2000 : svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* Skolverket, Stockholm, 2001.

Skolverket. *Lusten att lära - med fokus på matematik Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002.* Skolverkets rapport. Statens skolverk, Stockholm, 2003.

Skolverket. *PISA 2003 : [svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv]*. Skolverket, Stockholm, 2004a.

Skolverket. *TIMSS 2003 : [svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv]*. Statens skolverk, Stockholm, 2004b.

Skolverket. *PISA 2006 : 15-åringars förmåga att förstå, tolka och reflektera : naturvetenskap, matematik och läsförståelse*. Skolverkets rapport, 306. Skolverket, [Stockholm], 2007a.

Skolverket, Sverige. *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003 : huvudrapport - svenska/svenska som andra språk, engelska, matematik och undersökningen i årskurs 5*. Skolverkets rapport, 251. Skolverket, Stockholm, 2004c.

Skolverket, Sverige. *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003 : sammanfattande huvudrapport*. Statens skolverk, Stockholm, 2004d.

Skolverket, Sverige. *Grundskolans ämnen i ljuset av nationella utvärderingen 2003 : nuläge och framåtblickar*. Skolverket : Fritzes kundservice, Stockholm, 2005.

Skolverket, Sverige. *Vad händer med läsningen? : en kunskapsöversikt om läsundervisningen i Sverige 1995-2007*. Skolverket : Fritze [distributör], Stockholm, 2007b.

Speer, Natasha M. Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational studies in mathematics*, 58(3):361 – 391, 2005.

Statskontoret, Sverige. *Lärares utbildning och undervisning i skolan : kartläggning och analys*. Statskontoret (Stockholm. 1975), 2007:8. Statskontoret, Stockholm, 2007.

Sterner, G. och Lundberg, I. *Läs och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. NCM-rapport. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs univ., Göteborg, 2002.

Strässer, Rudolf och Vetenskapsrådet. *An overview of research on teaching and learning mathematics*. Vetenskapsrådets rapportserie, 2005:7. Vetenskapsrådet, Stockholm, 2005.

Tall, D. och Vinner, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12: 151–169, 1981.

Unenge, Jan. *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon : -med mina ögon sett*. Lärare lär,. Natur och kultur, Stockholm, 1. uppl. utgåvan, 1999.

Utbildningsdepartementet. *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna : Lpo 94 : Lpf 94*. Utbildningsdep., Stockholm, 1994.

Vinner, S. The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2): 97–129, 1997.

Wallby, Karin, Carlsson, Synnöve, Nyström, Peter, och Skolverket. *Elevgrupperingar: en kunskapsöversikt med fokus på matematik- undervisning*. Skolverkets monografiserie,. Skolverket, Stockholm, 2001.

Wester, A. och Henriksson, W. The interaction between item format and gender differences in mathematics performance based on timss data. *Studies in Educational Evaluation.*, 26(1):79–90, 2000.

Wistedt, I. och Martinsson, M. Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, 6(2): 173–185, 1996.

Wyndhamn, J. och Säljö, R. Word problems and mathematical reasoning: a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and instruction*, 7:361–382, 1997.

Wyndhamn, Jan. *Problem-solving revisited : on school mathematics as a situated practice*. Linköping studies in arts and science, 98. Tema, Univ., Linköping, 1. uppl. utgåvan, 1993.

Wyndhamn, Jan. *Från räkning till matematik : om matematik och matematikämnet i de senaste läroplanerna*. Univ. Inst. för tillämpad lärarkunskap, Linköping, 1997.

Wyndhamn, Jan, Riesbeck, Eva, och Schoultz, Jan. *Problemlösning som metafor och praktik : studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i matematik- och teknikundervisningen*. Institutionen för tillämpad lärarkunskap Univ., Linköping, 2000.

Österholm, M. Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3):325–346, 2006a.

Österholm, Magnus. *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. Matematiska institutionen, Linköpings universitet, Linköping, 2006b.